

Stimmung und Intonation bei Blechblasinstrumenten

Mensuränderungen und deren Auswirkung bei Trompeten.

Sideletter #2:

Schall in Rohren – Sound in uniform Tubes

Projektstand per 8.7.2023, Revision 10.0

Die aktuellste Version dieses Dokuments finden Sie auf der Projektseite:

<http://www.preisl.at/brassissima/>

Begleitende Dokumentation zum Projekt / Thema.
Development, Work, Calculation and Copyright:



(=“Brass Instrument Scanning System – Impedance Measurements & Analysis”)



Hermann Preisl

Altwaidhofen 45
3830 Waidhofen/Thaya, Austria

brassissima@preisl.at

P.S.: Wer systematische Fehler, Schwachsinn oder falsche Behauptungen findet:

Bitte diese **nicht !!** behalten,
sondern bitte um kurze Info an mich, das hilft mir sehr weiter, danke!

| | |
|---|----------|
| Inhalt: | 2 |
| Musikus vs. Physikus / eine Sache der zeitlichen Möglichkeiten | 5 |
| Vertiefung in einige Begriffe, die bei Wellengleichungen verwendet werden | 5 |
| Zusammenhang mit Schallwellen in Rohren | 6 |
| Akustische Flußimpedanz, Resonanz, Vergleich mit elektrischem Schwingkreis | 7 |
| Spezifische Impedanz, charakteristische Impedanz Z_c eines Rohres | 9 |
| Dezibell, Wave-Impedanz, Q1-Faktor | 9 |
| Äquivalente, invers proportionale Querschnittflächenänderungen | 11 |
| Zylindrische Rohre, Mensur und Input Impedanz Magnituden | |
| Der Übergang vom Raum zum Rohr und grundlegende akustische Eigenheiten: | 12 |
| Zylinder - Längenänderungen = Mode # Änderung | |
| Spezialfall: Perturbationslänge = Rohrlänge = $1/4$ WL = Mode #1 | 14 |
| Konstante Wellenlänge in unterschiedlichen Rohrlängen, höhere Modes | |
| Auswirkung von Verlusten und Endkorrektur / ZL | 15 |
| Magnituden-Verluste anhand Reibung sind invers proportional zur Frequenz | |
| Auswirkung von (stärkeren) modellierten Verlusten | |
| Die Magnituden Hüllkurve in einem closed-open Zylinder nimmt mit dem Kehrwert ($1/f$) der $\sqrt{\text{Frequenz}}$ = $\sqrt{1/\text{Frequenz}}$ ab: | 18 |
| Doppelt logarithmische Darstellung und Abkling-Konstante / viskothermale Verluste | 19 |
| Zylinder - Querschnitt / Boresize / Mensur Änderungen: | |
| Wird der gesamte Querschnitt abgeändert, Magnituden Änderungspotential = $1/q_0$ | 20 |
| Boresize und Resonanzfrequenzen höherer Modes | 21 |
| Wie kommt man generell zu Magnitudenwerten der Peaks in akustischen MegaOhm? | 22 |
| Lösung: Über eine charakteristische Frequenz = Dichte ρ * Schallgeschwindigkeit c | |
| Berechnung der Input Impedanz Minima, Maxima Peak u. Hüllkurven Werte, Z_c | 23 |
| Der Zusammenhang von Rohrlänge, Querschnitt, Frequenz und Impedanz Magnitude | 24 |
| Übersicht Input Impedanz Magnituden typischer zylindrischer Rohrquerschnitte | 25 |
| Z_c , q_1 Magnituden Faktor sowie Z_{min} aus Z_{max} Werten anhand Querschnitt ermitteln | |
| Beidseitig geschlossener Zylinder, Magnituden und Effekte einer Undichtheit | 26 |
| Zylindrische Rohre, Mensur und Resonanzfrequenzen | |
| Globale Änderung der Resonanzfrequenzen bei Boresize Änderung | 27 |
| Endkorrektur, Verluste, Inharmonizität, ART Simulation Rohre mit 1m Länge | 28 |
| Z_{in} Peak Änderungen closed-open Zylinder 1m Länge gegenüber Dia 10mm | 29 |
| Frequenzänderungen closed-open Zylinder 1m Länge gegenüber Dia 10mm | 30 |
| Einfluss von Endkorrektur offenes Ende, entflechten wandnaher Verluste | 31 |
| Harmonizität von closed-open Zylindern, Querschnitt- bzw. Mensurabhängigkeit | 32 |
| Änderung der Grundstimmung (Resonanzfrequenz Mode #1) mit Boresizeänderung | 33 |
| Endeffekt: Halbe Querschnittfläche = logarithmisch doppelt starke Frequ. Vertiefung | |
| Näherung, Variante A anhand \log_2 und Konstante $(\sqrt{2})^2$, alternativ π | 33 |
| Näherung, Variante B anhand Flächendifferenzfaktor X_e und Konstante | 34 |
| Näherung, bei kleiner Änderung $q_0 < 1$: Geomittel Pot. +/-Cent mit $q_{cent} = 1/(1-dDia)$ | |
| Closed-open Zylinder, Impuls und 4 halbe Roundtrips, Einschwingvorgang: | 35 |
| Open-open Zylinder: Nur 2 halbe Roundtrips = $1/2$ Wellenlänge = doppelte Frequenz | |
| Schwingungsmoden 0=eindimensionale, ebene harmonische Longitudinalwellen | 38 |

| | |
|---|----|
| Wellengleichungen | 39 |
| Harmonische Welle – partielle Ableitungen nach Zeit und Ort | 40 |
| Mathematische Ableitungen harmonischer Wellen und Zusammenhänge: | 41 |
| Die Zeit läuft ... Phasen: Zeit-Differenzen von Druck und Volumenfluß | 42 |
| Druck-Verlauf im closed-open Zylinder, Phasen = zeitliche Zustände | 43 |
| Volumenfluss im closed-open Zylinder, Partikel-Velocity begreifen | 44 |
| Energie-Übergang und warum Impedanz-Mismatch nicht schlecht ist! | 45 |
| Die reaktiven Anteile von Impedanz – Trägheit und Federsteifigkeit | 45 |
| Helmholtz Resonator, Okarina und Eingangsimpedanz Trompetenmundstück | 47 |
| Physik und Berechnungsformeln (© Universität New South Wales, Australien) | |
| Akustische Impedanz, Intensität, Power (Leistung) | 49 |
| Volumenfluß und charakteristische Impedanz Z_c bzw. Z_0 (in einem Rohr): | 50 |
| Luft als elastisches Medium, Druck und Volumen: | 51 |
| Wie Druckvariationen Partikeldisplacement hervorrufen, Energieerhaltung: | 52 |
| Kompression / De-Kompression: Wie Partikeldisplacement den Druck beeinflusst: | 53 |
| Acoustic Compliance = geschlossene Cavity = Höhle / Federkraft: | 54 |
| Acoustic Inertance = Trägheit (Masse u. Beschleunigung, kurzer offener Zyl., constr.) | 55 |
| Radiation Impedanz an offenen Enden (Strahlungswiderstand, Inertance) | 56 |
| Reflektion an offenen Enden und Reflektionsfaktor; geschlossene Enden | 57 |
| Energie einer wandernden harmonischen Welle | 58 |
| Formelsammlung Zylinder unendlicher Länge, finiter Länge, Eingangsimpedanz | 59 |
| Reverse-Engineering: von Z zu den Einzelkomponenten und Phasenwinkel | |
| Z =Druck/Fluss, die wundersame Wandlung des Imaginärteils ω^2 | 62 |
| Alles nur imaginär? Wie kommt es zu Phasenwinkel 0 bei Impedanz Min und Max? | 64 |
| Die $ Z $ Beträge der Funktionen Druck $F(\omega/\pi)$ und Fluss $F(\omega/\pi)$ über Frequenz | 67 |
| Z = Druck/Fluss, die komplexe Division und Metamorphose der Potentiale p und U : | 68 |
| $ Z(\omega) = p/U$, Druck $ p(\omega) = Z \cdot U$, Fluss $ U(\omega) = p/Z$, jeweils komplex multipliziert/dividiert | 68 |
| $ Z(\omega) $ Betrag=Impedanz, $ z_1(\omega) $ Betrag = Druck, $ z_2(\omega) $ Betrag = Fluss | 68 |
| Die komplexen Einzelkomponenten Druck z_1 und Fluss z_2 und das Verhältnis Z : | 69 |
| Fluss Impedanz am Eingang eines closed-open Zylinders, Real, Imag. Teil, Phase | 70 |
| Kann man den Winkel Phi anhand des Zeigers (Z-Betrages) errechnen? | |
| Lösungsansatz in 4 Schritten | 70 |
| Simulation – Kettenmatrix Transfer Methode | |
| Ergebnisse Druck- und Flusskomponenten mit der Matrix | 74 |
| Die Analogie elektrischer Wellenleiter und akustischer Eigenschaften von Rohren | 75 |
| Funktion, Ausbreitungskoeffizient und Formeln für analytisch bekannte Elemente | 76 |
| Behandlung von thermoviskosen Verlusten und Radiation Impedanz | 77 |
| Querschnittsprünge – Boresteps – Bore Discontinuities (nicht auf Zylinder beschränkt) | 77 |
| Konsequenz für lokale Querschnittänderungen = Perturbationen: lokal Z/Z_c | 78 |
| Simulationssoftware und wie diese unter der Haube funktioniert: | 78 |
| Excel, schrittweise Berechnung anhand der vorgestellten Kettenmatrix Methode | 79 |
| $p\omega = Z \cdot U$, $U\omega = p/Z$, proportional zu Frequenz ω | 84 |
| Phasenlaufzeit, Gruppenlaufzeit | 86 |

Vertiefung in einige Themen:

| | |
|--|----|
| Reflektionsfaktor / Reflektionskoeffizient, SWR = Standing Wave Ratio | 86 |
| Fractional Return % nach 1 Roundtrip ergibt die Verluste durch Abstrahlung+Reibung | 87 |
| Behandlung von Strahlungswiderstand = Zrad, wenn $\ll ka = 1,0$: | 88 |
| Reflektion Realteil Zrad ist proportional zu ω^2 , Imaginärteil = Trägheit proportional zu ω | 89 |
| Abstrahlung, Reflektion, Verluste innerhalb des Rohres, Q | 90 |
| Verluste und Beispiele Zc sowie Cutoff, Phasengang MPC, Hand in Bell bei Waldhorn | 90 |

Druck- und Flusszustände, Phasen = Impedanz im Rohr

| | |
|--|-----|
| Schwingungen Momentzustände im closed-open Zylinder – Phasen im Zeitraffer: | 91 |
| Druck und Fluss im Rohr, Winkel und Steigungen - Resonanzfall + Flanken | 93 |
| - Anti-Resonanz Fall | 95 |
| Auswertung Zylinder: Modes gleicher Phase verhalten sich akustisch gleichartig | 98 |
| Situation Anregung unter / über der lokalen max. Resonanzfrequenz eines Rohres | 99 |
| Zu kurze oder zu lange Rohre geben Versatz von Druck- und Flussknoten | 102 |
| Merke Phasenwinkel – Ein Mundstück verhält sich wie ein Filter | |
| und ändert so den Phasengang, siehe dazu Sideletter 1 – Basic Physik, Filter | 104 |

Musikus vs. Physikus / Eine Sache der zeitliche Möglichkeiten

Tonkünstler brauchen eine andere Denkweise als Physiker und Techniker. Musiker können sich „just in time“ keine Gedanken machen wie etwas zustande kommt sondern möchten, daß es gut „rüberkommt“ und so auch angenommen wird. Künstler haben daher prinzipiell ein Zeitproblem. Man liest die Noten vorab – oder hat die Töne im Kopf; zu gegebener Zeit sollen die dann raus! Wie diese Luftdruckstörungen dann beurteilt werden entscheidet eine „Jury“, wer immer das ist!

Eine notwendige Anzahl an Repetitionen = Zeit (wenn möglich bei Aufnahmen oder Proben) wird hier als eher negativ gewertet. Echtzeit = „Live“ = „~just in time“; gibt auch keine Möglichkeit etwas im Nachhinein zu korrigieren. Alles was bereits passiert ist erfährt hier auch das Auditorium. Das bedeutet aber nicht, daß Musiker und Künstler schlechte Mathematiker oder Physiker wären!

Physiker und Mathematiker dagegen haben viel Zeit etwas zu beschreiben was passiert (ist/wird), und um so mehr Wiederholungen, desto mehr Übereinstimmung mit Thesen und Formeln! Das bedeutet aber nicht, daß Physiker schlechte Musiker wären und vs, es braucht aber jeweils eine völlig andere Denkweise anhand der Aufgabenstellung und ihrer zeitlich möglichen Begrenzungen.

Den Physiker kann es +/- entzücken, wenn er Zusammenhänge live erlebt, einem Musiker kann es dann helfen, wenn er Zusammenhänge ohne Zeitdruck vorab kennt & daraus Nutzen ziehen kann!

„Einem Ingenieur ist nix zu schwör“. Hier muß ich kurz für mich einhaken und feststellen, daß mir das Verständnis komplizierter Frequenzverhältnisse, Equal Tuning, Just Intonation - sprich Intervalle, 2-3-4 Klänge beinahe „Just in Time“ kaum Mühe bereiten. Ich kann mir als analytischer Hörer / Performer meine Meinung und die Abweichungen davon bilden, ohne etwas irgendwie extra berechnen zu müssen, das macht das Gehör/Gehirn = „hardcoded und beinahe just in time“. Über Motive, Themen, Schlusswendungen usw. denke ich dann später in Ruhe nach. Bei „ k “, „ ω “ und „ φ “ gelingt das aber gar nicht ohne Nachdenken und Rechnen. Daher nochmals eine Vertiefung & Gedanken dazu – wir haben jetzt das Zeitproblem vorerst aus dem Spiel genommen:) *Ich empfehle aber vorab eventuell die Sideletter 1 Physik – Grundlagen durchzugehen.*

Frequenz:

Schwingungen pro Sekunde = Hertz Hz, damit können wir relativ einfach etwas anfangen. In der Akustik: Umso höher die Frequenz in Hz, umso höher der wahrgenommene „Ton“.

(Mittlere) Schallgeschwindigkeit:

Auch hiermit können wir intuitiv noch rasch etwas anfangen. Licht ist extrem schnell unterwegs (und bildet den Limes); Schall wesentlich langsamer, aber sogar in Luft noch erstaunlich schnell! Blitzt es bei einem Gewitter, so erfassen unsere Augen die viel schnelleren elektromagnetischen Wellen in Form von Licht bereits – für menschliche Verhältnisse in beinahe dem selben „Augenblick“; dann kann man die Sekunden abzählen bis wir ein Donnergeräusch hören und dieses ist oft zu Beginn nicht am Intensivsten. Aber wir können sagen daß dieser später gehörte Donner am Ursprung einem heftigen Ereignis gleichkommt, das „eine Druckwelle“ ausgelöst hat, die sich mit einer mittleren Schallgeschwindigkeit zu uns heranbewegt hat. In Luft und je nach Temperatur etc, mit rund 340 Meter/Sekunde. D. h. vergehen zwischen Blitz und Donner rund 10 Sekunden, wissen wir, daß die Blitzentladung ~3-3,5 km von uns entfernt war. Wir müssen hier aber bereits rechnen und = zählen, wir brauchen dazu vornehmlich unsere Sinnesorgane: Augen + Ohren (Haut).

Schallschnelle und Volumenfluß:

Hier wird es heftig, denn dafür haben wir kein Sinnesorgan. Die Wellenlänge ist generell definiert als Phasengeschwindigkeit / Frequenz. Der zeitliche Abstand von Wellenbergen definiert die Schwingungszahl = Tonhöhe. Der Abstand der Sonne zur Erde hat somit etwas mit der Lichtgeschwindigkeit zu tun ~300 Mio m/s! = 1Hz. Was wir als sichtbares Licht erfassen hat eine viel höhere Frequenz als die Grundwelle selbst. 380-780 TerraHz! Die Länge eines Rohres ergibt etwas mit den physikalisch möglichen auftretenden stehenden Wellenmoden. Nun stellt sich aber heraus, daß Schallwellen unterschiedlicher Frequenz sich z.B. in Hörnern mit unterschiedlichen Phasen-Geschwindigkeiten ausbreiten (Dispersion), das macht die Sache komplizierter.

Kreisfrequenz bzw. Winkelfrequenz ω in Radiant / sek.

Kreisumrundungen am Einheitskreis pro Sekunde im Bogenmass in Radiant

Frequenz * 2 pi = Der Winkel von 2 * Pi entspricht einer vollständigen Umdrehung =

1 vollständige Wellenlänge am Einheitskreis; der Kreis hat per „Definition“ 2*pi in Radian als Umfang = Strecke; da sich der Durchmesser nicht ändert, hat der Zeiger die normalisierte Zeigerlänge =1;

$\cos^2 + \sin^2$ eines gegebenen Winkels phi in Radiant immer die Zeigerlänge 1 ergeben (müssen).

Kreiswellenzahl „k“: Winkelfrequenz ω / Schallgeschwindigkeit (c), in Radiant / m

Die Winkelgeschwindigkeit „Omega“ ω geteilt durch c in m/Sek. ergibt die Kreiszahl „k“;

$$\frac{\text{Rad}}{\text{sek}} / \frac{\text{m}}{\text{sek}} = \text{Rad} / \text{m}$$

Hier ist also die Geschwindigkeit nicht mehr im Spiel; allerdings 2pi=Länge

Die Schallgeschwindigkeit selbst ist wieder dafür verantwortlich, daß Wellenlänge und Frequenz zueinander proportional sind, $k = 2\pi / \lambda$ Wellenlänge in m

so ergibt sich der Spagat von der Frequenz zu einer Länge. k ist der (Kehrwert der λ) * 2pi

ω =Omega : wie schnell dreht sich der Einheitskreis-Zeiger in Radiant -->

/Speed =k Kreiswellenzahl: wie oft bzw. wie weit dreht sich der Zeiger in Radiant im Kreis.

wie viele ganze Schwingungen passen in 1 Kreisumrundung 2pi ->

$$k / 2 \pi = 1 / \lambda =$$

ohne 2pi ergibt sich die

wie viele ganze Schwingungen passen in dieses Rohr.

Wellenzahl: $1/\lambda$

Der Zusammenhang mit stehenden Wellen in Rohren mit n = Modenummer = 1,2,3,4...:

Open-open Zylinder: $f(n) = n \cdot c / 2 \text{ RohrLänge}$ $k(n) = 2\pi \cdot f(n) / c$ $k(n) = n \cdot 2\pi \cdot 1/2 \text{ Länge}$

$k(n) = n \cdot \pi$ $k \text{ von } n1 = 1 \cdot \pi$ -> $k(n) = n \cdot 1/2 \text{ von } 2\pi$

$1/2$ Wellenlänge = $2\pi/2$ und alle Vielfachen davon ergeben Resonanz, wo $k = 1 \cdot \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Closed-open Zylinder: $f(n) = (2n-1) \cdot c / 4 \text{ RohrLänge}$ $k(n) = 2\pi \cdot f(n) / c$ $k(n) = (2n-1) \cdot 2\pi \cdot 1/4 \text{ Länge}$

$k(n) = (2n-1) \cdot 1/2 \pi$ $k \text{ von } n1 = 1/2 \pi$ -> $k(n) = (2n-1) \cdot 1/4 \text{ von } 2\pi$

$1/4$ Wellenlänge = $2\pi/4$ und ungeradzahlig Vielfache ergeben Resonanz, wo $k = 0,25 \cdot 2\pi, 0,75 \cdot 2\pi, 1,25 \cdot 2\pi, \dots$

Für beide Resonatortypen gilt:

$1/\lambda =$ wie viele ganze Schw. passen in 1m:-> $k(n)/2\pi$ λ = Die Wellenlänge in m beträgt: $1/[k(n)/2\pi]$

Closed-open Zylinder und die Bedeutung der Kreiswellenzahl „k“:

| Resonanzmode | Rohrlänge | n2-1 | Wellenlänge | $1/WL \cdot (2\pi) = k$ | =phi | =Winkel Grad |
|--------------|-----------|------|--------------------------|-------------------------|------|----------------|
| 1 | 1m | 1 | $1m / 1 \cdot 4 = 4m$ | $0,25 \cdot 2 \pi$ | 1,57 | 90 0+90 |
| 2 | 1m | 3 | $1m / 3 \cdot 4 = 1,33m$ | $0,75 \cdot 2 \pi$ | 4,71 | 270 360-90 |
| 3 | 1m | 5 | $1m / 5 \cdot 4 = 0,8m$ | $1,25 \cdot 2 \pi$ | 7,85 | 450 360+90 |
| 4 | 1m | 7 | $1m / 7 \cdot 4 = 0,56m$ | $1,75 \cdot 2 \pi$ | 11 | 630 720-90 |

Stehende Welle = auch eine Momentaufnahme einer harmonischen Welle in Rohren:

Man kann sie aus Sicht der Druckbäuche -> cos, oder aus Sicht der Partikelauslenkung -> sin beschreiben
allgemeine Formel:

$$A \cdot \cos \{ 2\pi \cdot x / \lambda + \varphi \} \text{ oder } \sin (2\pi \cdot x / \lambda + \varphi)$$

$$A \cdot e^{i(2\pi \cdot x / \lambda + \varphi)} \quad \dots \quad A \cdot e^{i(kx + \varphi)}$$

| | | Winkel in Grad | Winkel in Radiant | | $\cos(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ |
|-----|-----|----------------|-------------------------|----------|-----------------|-----------------|
| sin | von | 0 | $2\pi \cdot 0/4 = 0$ | =0 | 1 | 0 |
| sin | von | 90 | $2\pi \cdot 1/4$ | =1,57.. | 0 | 1 |
| sin | von | 180 | $2\pi \cdot 2/4 = \pi$ | =3,14.. | -1 | 0 |
| sin | von | 270 | $2\pi \cdot 3/4$ | =4,71.. | 0 | -1 |
| sin | von | 360 | $2\pi \cdot 4/4 = 2\pi$ | = 6,28.. | 1 | 0 |

usw.

Cosinus = Amplitudenausschlag eines Winkels in Radiant, der sich bei x aus $k \cdot x$ ergibt.

In k steckt über die Schallgeschwindigkeit auch die Frequenz und Wellenlänge, A ist ein Amplitudenfaktor

$$y(x) = A \cdot \cos(k(n) \cdot x) \quad k = w/c \quad k = 2\pi \cdot f/c \quad k = 2\pi / \lambda \quad x = \text{eine Entfernung}$$

$$y(x) = A \cdot \cos(\text{an der Stelle } x \text{ (k(n) * x + } \varphi)) \quad \varphi = \text{ein geänderter Startwinkelbetrag in Rad}$$

Damit sich eine stehende Welle aufbauen kann ist eine (Teil)-Reflektion am offenen Rohrende notwendig. Das erfordert einen Druckknoten am offenen Ende. **Der cosinus (als Druckfunktion) muß hier 0 ergeben, so daß es nur Winkel und Längen sein können, wenn sich $(k \cdot x)$ passend ergänzen.** Rohrlänge= x muß daher ein Faktor sein, der ein Vielfaches einer $\frac{1}{4}$ WL ist, und andererseits im Fall des closed-open Zyl. eine wiederum nur $\cos \sim 0$ am Ende liefert, d.h. es sind nur ungeradzahlige Faktoren 1,3,5,7 usw. für maximale Resonanz möglich.

Ergänzung und Lückenfülle, Analogie zu mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen:

In der Elektrotechnik – bei Wechselstrom – wird Resonanzgüte dadurch beschrieben, daß die Stromstärke bei gleichbleibender Versorgungsspannung den maximal möglichen Wert erreicht (Ladungen pro Zeit). Neben einem vorhandenen realen Widerstand wird die resultierende Frequenz wo max. Stromfluß möglich wird von 2 weiteren Größen stark bestimmt: Induktivität = Trägheit und Kapazitätivität = 1/Steifigkeit.

Trägheit kann hier mit der Induktivität einer Spule verglichen werden, Trägheit erhöht den zeitlichen Widerstand um so mehr, als die Geschwindigkeit steigt.

Steifigkeit / Stiffness / Federkraft, oder ihr Gegenteil = Springiness wirken entgegengesetzt.

Bei angeregten mechanischen Schwingungen ist das Potential = Höhe Pendelausschlag = Spannung; die Masse und Beschleunigung des Pendels = kinetische Energie = „Stromfluß“. Zeitlich veränderliche Werte werden üblicherweise klein geschrieben, komplexe Größen oft mit Unterstrich.

Akustische Flußimpedanz, Resonanz, Vergleich mit elektrischem Schwingkreis

Akustische Flussimpedanz ist das komplexe Verhältnis von Druck zu Fluß. An den Polstellen ist die Blindimpedanz in Summe Null, induktive und kapazitive „Reaktance“ ergeben ein Gleichgewicht und die Impedanz entspricht realem =Wirk-Widerstand. Phasenwinkel $\phi = 0$.

Beim elektrischen Schwingkreis spricht man von „Resonanzfrequenz“, wenn der Stromfluß I in Ampere (Anzahl Ladungen Coloumb Q pro Sekunden) einen maximal möglichen Wert erreicht.

Nach dem ohmschen Gesetz ergibt sich, daß der reale Stromfluß dann maximal wird, wenn (bei unveränderter konstanter) Spannung der reale Widerstand R in Ohm minimal wird. Anders herum wird der Stromfluß sehr klein, wenn der reale Widerstand sehr groß wird. Nur der Strom I als Elektronenfluss ist eine physikalische Basisgröße, die beiden anderen sind abgeleitete Größen.

Strom I in Ampere $A =$ Spannung U in Volt V / ohmscher Widerstand R in Ohm

Verwendet man nun die Analogie zur Elektrizität, dann entspricht der Strom I in Ampere (Ladungen pro Sekunden) durch eine begrenzte Querschnittsfläche (Draht mit einem gewissen Widerstand gegenüber einem Stromdurchfluß anhand Querschnitt, Länge, Material, Temperatur) dem möglichen Volumenfluß pro Zeit, bzw. der Partikelauslenkung von Luftmolekülen an einer bestimmten Stelle zu einer bestimmten Zeit.

Die Definition Schallschnelle als Größenordnung ist nicht ganz einfach zu erfassen, ich bleibe daher bei dem Begriff „Fluss“. Immer wenn Masse in Bewegung ist wird das als „kinetische“ = Bewegungsenergie aufgefasst. Darunter fallen z.B. auch die Begriffe Trägheit-> Turbine, Reibung, Viskosität, Federsteifigkeit -> Kondensator; -etc.

Die Schallschnelle als Wert ändert ihre Eigenschaften im Nah- und Fernfeld bezüglich Phasenlage, etc., daher gibt es auch mehrere Definitionen von akustischer Impedanz (Fluss-, Feld-Impedanz);

Die elektrische Spannung U in Volt = Potentialdifferenz ist die Beschreibung von einander getrennter negativer und positiver Ladungs(Mengen). Diese Trennungsarbeit erfolgte „gewaltsam“ vorab, in der Ladungstrennung steckt nun potentielle Energie.

Dies wird dem Schallwechseldruck gegenüber dem statischen Druck gleichgestellt. Negativ und positiv geladene Elektronen werden stets versuchen, auf einfachstem Weg in ein Gleichgewicht zu kommen. Das gilt auch für (Luft)-Druck; Über- und Unterdruck werden sich schnellstmöglich auf ein gemeinsames Niveau zu einem statischen Druck einigen. Die Definition Druck = Kraft pro Fläche. Gibt es keinen Wechseldruckunterschied, dann gibt es auch keinen Fluß. Es muß zuerst einen Druckunterschied geben (Potentialdifferenz), erst dann kann ein Fluß stattfinden.

Wir setzen gleich: $\frac{(\text{Wechsel})\text{Druck } p \text{ in Pascal/m}^2}{(\text{Wechsel})\text{Fluss } q \text{ in m}^3/\text{sek}}$ $\frac{(\text{Wechsel})\text{Spannung in Volt}}{(\text{Wechsel})\text{Strom in Ampere}}$
 = Akustische Fluss-Impedanz = (Wechsel)Stromwiderstand in Ohm

Der komplexe Wechselstromwiderstand \underline{Z} setzt sich zusammen aus einem (realen) ohmschen Widerstand zR , induktivem Widerstand zL und kapazitivem Widerstand zC .

Angeregte Schwingungen:

Im elektrischen Schwingkreis wird eine Spannungsquelle mit periodisch wechselnder Polung als potentielle Energie und externe Kraft eingesetzt, um den Schwingkreis anzuregen. Je nach Anregungsfrequenz (in Hertz) pro Sekunde ergeben sich unterschiedliche Anteile an Blindstrom, somit Blindleistung und Blindwiderstand.

Dies aus dem Grund, da der anzuregende Schwingkreis bzw. seine Bauteile frequenzabhängig Trägheit (Induktion / Spule) und entgegengesetzt Federsteifigkeit (Kapazität) hervorrufen. Gleichen sich diese beiden Effekte aus, so geschieht dies bei jener Frequenz, die als Resonanzfrequenz bezeichnet und beobachtet wird. Der Blindanteil der komplexen Impedanz verschwindet hier und es bleibt übergangsweise der reale Widerstand.

Eine Impedanzkurve zeigt alle Frequenzen in aufsteigender Reihenfolge und den Betrag von Z . Wird der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz real und klein, so entspricht dies maximal möglichem Stromfluss in Ampere. In der Impedanzkurve sind das die Impedanzminima. Wird der Widerstand dagegen bei einer bestimmten Frequenz real und groß, so entspricht dies dem minimal möglichen Stromfluss in Ampere, in der Impedanzkurve sind das die Impedanzmaxima.

Eine komplexe Zahl kann man als Realteil und Imaginärteil in kartesischen Koordinaten beschreiben, oder in der Gaußschen Zahlenebene auch als Zeigerlänge (Betrag von Z oder „Länge der Hypothenuse“ und einem Kreiswinkel ϕ (im Bogenmaß)).

Die Zeigerlänge entspricht der Amplitude der komplexen Impedanz und ist immer positiv (einen negativen Widerstand gibt es nicht) und dem Phasenwinkel ϕ . Dieser Winkel $\phi = \arctan$ (Gegenkathete als imaginärer Anteil / Ankathete als realer Anteil) wird durchgangsweise Null, wenn die Zeigerlänge (Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks) gleich der Ankathete ist.

D.h. bei Impedanzmaxima und -minima ist der Winkel jeweils $0 = \sin$ aus Winkel 0 Radiant und bei \sin aus Vielfachen von π . Der imaginäre Anteil verschwindet hier. Bei davon abweichenden Frequenzen wird der Phasenwinkel abwechselnd positiv und negativ, mit einem maximalen Winkel von $\pm 90^\circ = \pi/2$ im Bogenmaß. Die Anteile von kapazitivem und induktivem Blindwiderstand wirken hier am stärksten einseitig, besitzen also ein ungleiches Gewicht.

Betrachtet man obige Ausführungen mit den Eigenschaften sich bildender stehender Wellen in Rohren die beidseitig offen sind, so entsprechen mögliche Resonanzen dem maximalem Fluß, der an den offenen Enden erreicht wird und treten daher bei Frequenzen auf, wo der Impedanzbetrag am geringsten ausfällt: Resonanz bei Impedanzminimabeträgen.

Bei einem einseitig verschlossenen Rohr können sich am geschlossenen Ende keine Flußbäuche bilden, die möglichen Resonanzen entstehen an Frequenzen mit Impedanzmaxima, hier ist das wirksame Verhältnis Druck zu Fluß = Eingangs-Impedanz Betrag am höchsten.

Bei Elektrizität wird die Stromstärke indirekt über den gemessenen Spannungsabfall anhand eines bekannten Widerstandes „herausgerechnet“ (Ohmsches Proportionalitätsgesetz). Die Spannung zu bestimmen ist technisch also viel weniger anspruchsvoll. Ebenso ist es bei Schallwellen wesentlich einfacher, den Druck zu bestimmen und daraus den resultierenden „Fluß“ über die Impedanz zu ermitteln. Kleine Druckunterschiede misst man mit Mikrofonen, Ohren reagieren auch auf Druck.

Mit Schallfluß, Volumenfluß ist hier nicht der DC Direct Current -Luftfluß durch das Rohr hindurch gemeint, sondern ein resultierender AC- Alternating Current Fluß (vor- und rückwärts), also die lokale Partikelauslenkung durch die Longitudinalwelle. Glücklicherweise ist der DC-Fluß für Blechbläser nicht die entscheidende Größe. Da die Impedanz bei Resonanzfrequenzen den wirksamen (realen) Widerstand annimmt, kann man sagen: Bei Resonanzfrequenzen ist der Fluß ist um den Faktor Impedanzbetrag kleiner als das Druckpotential, bei Antiresonanzen ist der Fluß um diesen Faktor größer.

Die verschiedenen Begriffe und Arten von akustischer Impedanz

Im freien Raum wird einer Druckwelle eine spezifische Impedanz zugeordnet, die neben Druck die Partikelgeschwindigkeit beinhaltet, die „Schallschnelle“. $z = p/v$. Schall breitet sich 3dimensional kugelförmig aus. p = Schallwechseldruck und v = Schallschnelle. Die spezifische Impedanz ist von der Elastizität und Dichte ρ des Übertragungsmediums (z.B.) Luft abhängig. So ist auch $z = \rho * v$. Die spezifische Impedanz bestimmt, wie stark Schallwellen bei Auftreffen eines anderem Mediums (z.b. von Luft in Wasser) transmittiert und reflektiert werden. Beachten: die spezifische Impedanz eines Mediums = Feldkennimpedanz im freien Schallfeld = $\text{Pa} * \text{s} / \text{m}$ hat eine andere Maßeinheit als die Flussimpedanz in Rohren, Einheit = $\text{Pa} * \text{s} / \text{m}^3$.

In unendlich langen Rohren (bzw. in endlich langen Rohren nur in der Zeitspanne, zu der keine Reflektionen vom anderen Rohrende ankommen), bedient man sich der charakteristischen Impedanz des Rohres. Hier ist zur Schallschnelle noch die Querschnittfläche mit berücksichtigt und beschreibt den Widerstand des Rohres samt Übertragungsmedium gegenüber Schall-Transmission (Transport). Hier sind allerdings noch keine Verluste etc. berücksichtigt.

Z_c oder $Z_o = \rho * c / A$ Dichte = ρ Phasengeschwindigkeit = c Querschnitt Fläche = A
 Z_c ist querschnittabhängig und für ein Rohr mit 11mm Durchmesser rund 4,3 Millionen akustische Ohm, welches daher meist als MOhm angegeben wird. (4,3 MOhm). In einem engen zylindrischen Rohr ohne Querschnittsänderungen ändert sich Z_c frequenzabhängig kaum, in Blasinstrumenten aber stark. Obwohl diese nicht unendlich lang sind verwendet man Z_c dennoch als Richtwert, das ist noch immer nicht die Impedanz die wir eigentlich suchen, aber der Übergang und Faktor dazu.

Z_c habe ich des öfteren in bisherigen Arbeiten näherungsweise als Wave-Impedanz bezeichnet, zusätzlich habe ich des öfteren einen sogenannten Q1-Faktor verwendet:

Wurzel aus Peak-Hüllkurve / Wurzel aus Dip-Hüllkurve = „Q1-Faktor“.

Impedanz Peak / Q1-Faktor gibt die Wave Impedanz ($\sim Z_c$)

Impedanz Minima * Q1-Faktor gibt die Wave Impedanz ($\sim Z_c$)

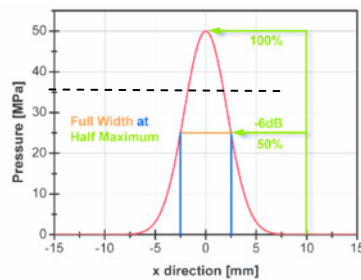
Die Wave Impedanz bzw. $\sim Z_c$ ist also der geometrisches Mittelwert zwischen Z-Werten von Minima (Antiresonanzen) und Impedanz Maxima (Resonanzen).

Am eindrucksvollsten erkennt man den Zusammenhang, wenn die Z-Beträge = Magnitude auf einer logarithmischen Skala aufgetragen werden.

deziBell und Megaohm: logarithmisch / linear

MegaOhm nach deciBell: $20 * \text{Log}_{10}(\text{MOhm} * 1\,000\,000)$

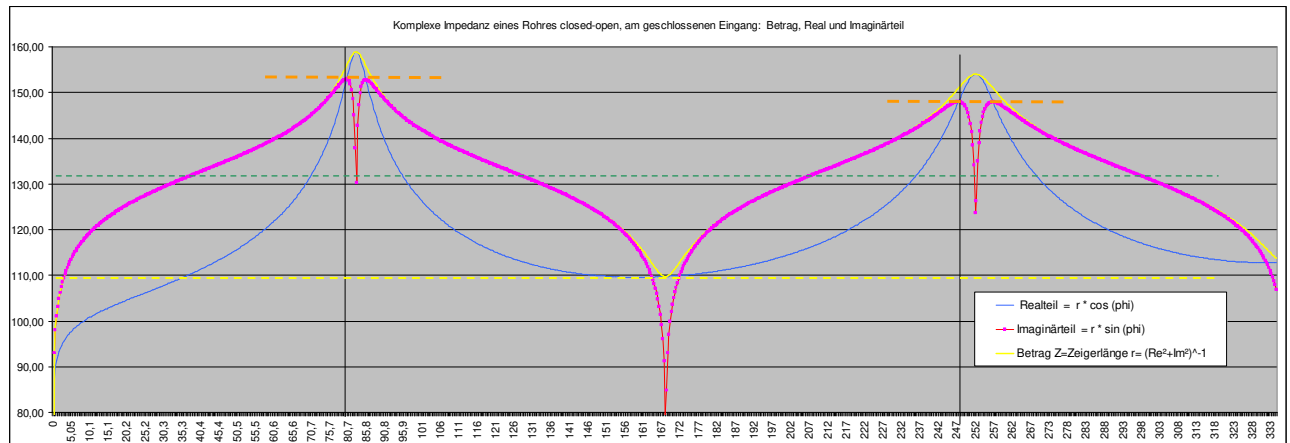
Dezibell nach Megaohm: $(10^{(\text{dB}/20)}) / 1\,000\,000$



In der Physik wird eine Dämpfung dagegen als positiver Wert betrachtet. Das führt natürlich zu Vorzeichenfehlern bei der Eingabe von Zahlen.

3 dB \equiv 1,414 fache Spannung (-)3 dB \equiv Dämpfung auf den Wert 0,707
 6 dB \equiv 2 fache Spannung (-)6 dB \equiv Dämpfung auf den Wert 0,5
 10 dB \equiv 3,162 fache Spannung (-)10 dB \equiv Dämpfung auf den Wert 0,316
 12 dB \equiv 4 fache Spannung (-)12 dB \equiv Dämpfung auf den Wert 0,25
 20 dB \equiv 10 fache Spannung (-)20 dB \equiv Dämpfung auf den Wert 0,1

-- = -3dB



--- = -3 dB = RMS = Wurzel aus $(1/2)=70,71\%$, - 6dB entsprechen Halbierung des Schalldruckes. Grün symbolisch charakteristische Impedanz Z_c , Gelb $\sim -48\text{dB} = 1/250$ der der Maxima.

Zylindrisches Rohr closed-open, (11mm Durchmesser, bei Zimmertemperatur, Medium Luft):

1 Akustisches Ohm = 10^5 Pascal-Sekunden/Meter³ = 0 dB
 100 Mega Ohm = 100 000.000 Ohm = 160 dB
 Die Z_c hat also beim 11mm Rohr 4,3 MOhm oder $\sim 133\text{ dB}$
 Minima Magnituden liegen bei $\sim 0,3\text{ MOhm}$ $\sim 109\text{ dB} = -24\text{ dB}$ gegen Z_c
 Maxima Magnituden liegen max. (1.Mode) $\sim 88\text{ MOhm}$ $\sim 157\text{ dB} = +24\text{ dB}$ gegen Z_c

Wurzel aus Maxima Mode1 / Wurzel aus Minima = Q1-Faktor, hier rund $\sim 17,12$
 gibt eine Wave Impedanz = geometrische Mitte bzw. $\sim Z_c \sim 5\text{ MOhm}$.

Hier muß betont werden, daß das nur anhaltweise Z_c entsprechen kann, da an der Frequenz mit einem Maximum kein Minimum liegt und umgekehrt, aber es gibt eine gute Näherung an Z_c . Bei Blechblasinstrumenten steigt die Wave Impedanz stark mit ansteigenden Frequenzen. Man kann aber festhalten: Z_c ist der Wert, mit dem Druck und Fluß skaliert werden.

Nun zur eigentlichen Fluss-Impedanz, meist nur akustische Impedanz Z :

Diese ist frequenzabhängig und beschreibt das Größenverhältnis von akustischem Druck p zu akustischem Fluss U an einem bestimmten Ort, z.b. Z_{in} = Die Impedanz am geschlossenen Eingang, Z_L = am offenen Ende, Z_R = Radiation Impedanz = zus. Widerstand. Hier wird nicht mehr nach Über- und Unterdruck unterschieden, es gibt auch nur einen „Fluss“. $1/Z$ ist die Admittance.

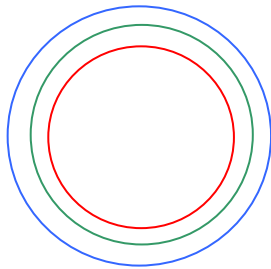
$Z(f) = p(f) / U(f)$ und hierbei der Betrag einer komplexen Zahl.

Eine komplexe Zahl besteht aus einem Zahlenpaar: Realteil + Imaginärteil.

Die Magnitude Z entspricht der Zeigerlänge $r = \text{Hypothenuse} = \text{Wurzel aus } (\text{Realteil}^2 + \text{Imaginärteil}^2)$. Der Phasenwinkel ist der Winkel der Steigung (\tan) = $\arctan(\text{Imaginärteil}/\text{Realteil})$ im Bogenmass. Es ist die Kreiswinkeldifferenz: Winkel Druck – Winkel Fluss.

Somit sind wir beim Volumenfluss angelangt. Dieser beschreibt ein Volumen bestehend aus der Querschnittfläche des Rohres und der Zeitspanne, die verstreicht = Länge anhand Partikelgeschwindigkeit.

Äquivalente, invers proportionale Querschnittflächenänderungen



Grün: Unperturbirt = Boresize, Blau = Enlargement, Rot = Constriction

Kreisfläche = $\pi \cdot (r^2)$.

Da π lediglich ein Skalierungsfaktor ist, können wir π bei der Betrachtung ausklammern.

| | | |
|-----------------------------------|------------|--|
| Sei der unperturbirte Durchmesser | 10mm | $r^2 = 5 \cdot 5 = 25,0 \cdot \pi$ |
| Sei eine Aufweitung +10% | +1mm=11mm | $r^2 = 5,5 \cdot 5,5 = 30,25 \cdot \pi = + 5,25 \cdot \pi$ |
| Sei eine Constriction -10% | -1mm = 9mm | $r^2 = 4,5 \cdot 4,5 = 20,25 \cdot \pi = - 4,75 \cdot \pi$ |

Soll die Einengung die selbe Flächendifferenz $-5,25 \cdot \pi$ haben, muss sie kleiner sein.

Wurzel aus 19,75 = Radius 4,441 * 2 = 8,888 mm Durchmesser. $0-X = 0+X$

| | | |
|--|------------------|-----------------|
| Betrachtet man das Verhältnis Durchmesser 11/10 | = 1,1 = q_0 | 9/10 = 0,9 |
| bzw. das Verhältnis der Querschnittfläche 30,25/25 | = 1,21 = q_0^2 | 20,25/25 = 0,81 |

| | | | |
|--|-------------|--------|----------|
| Nimmt man hingegen das Inverse von q_0 | = $1/q_0$ | 1/1,1 | = 0,9091 |
| bzw. von q_0^2 | = $1/q_0^2$ | 1/1,21 | = 0,8264 |

gibt 9,0909 mm Durchmesser

ist die gesuchte Potential-Proportionalität gefunden. 1,0 ist die geom. Mitte von 0,9 und 2.

Damit ist die **unperturbirte Boresize** exakt als **geometrisches Mittel 1,0** definiert, mit $\sqrt{(\text{Enlargement} \cdot \text{Constriction})} = \text{Boresize}$. Da q_0^2 Faktoren sind und q_0^2 unperturbirt immer 1,0 ergibt kann die Wurzel (hier) schon wieder weggelassen werden.

| | |
|--|---|
| Es folgt: Querschnitt (Radius oder Dia): | Enlargement / q_0 = unperturbirt / q_0 = Constriction |
| Querschnittfläche | Enlargement / q_0^2 = unperturbirt / q_0^2 = Constriction |

bzw. unperturbirt * q_0^2 = Enlargement ist invers proportional zu unperturbirt / q_0^2 = Constriction

| | |
|---|----------------------------------|
| Enlargement/Constriction = q_0^4 als Flächenfaktor, | Geometrie = $\sqrt{q_0^4}$ = 1,0 |
| Enlargement/Constriction = q_0^2 als Längenfaktor. | Geometrie = $\sqrt{q_0^2}$ = 1,0 |

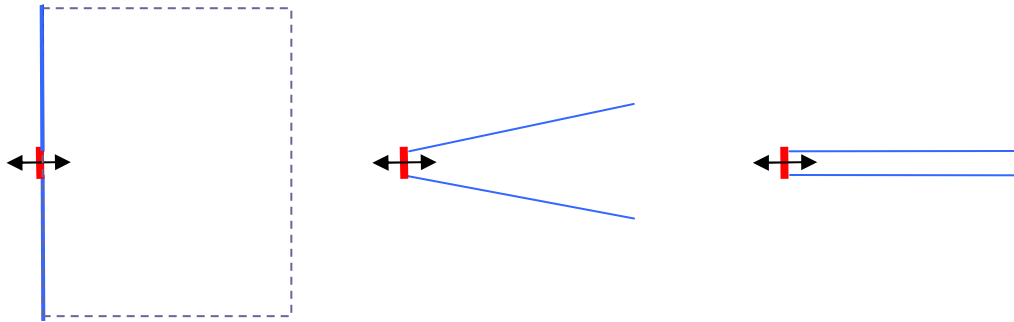
Wiederum daraus folgt, daß eine Einengung für gleiches inverses Magnituden Potential geringer ausfallen muss, bzw. eine Aufweitung dann hingegen invers proportional stärker zur Einengung.

| | | | |
|--|----------------------|-------------------------|---------|
| keine Flächendifferenz X: | X=0 | keine Durchmesser Diff. | 10,00mm |
| Aufweitung um 10% Querschnitt $q_0=1,1$ | = +X 0,21 | Durchmesser = | 11,00mm |
| gleiche Flächendifferenz: | -X 0,21 == +X 0,21 | Constriction stärker | 8,88mm |
| gleiche Durchmesserdiff: | -X 0,19 < +X 0,21 | | 9,00mm |
| invers proportional $1/q_0^2 = q_0^{-2}$ | -X 0,1736 << +X 0,21 | Constriction geringer | 9,09mm |

Nimmt man anstelle der Aufweitung als Grundlage und fixe Größe die Einengung $1/q_0 = q_0^{-1}$, im obigen Fall $1/q_0 = 0,9 \cdot 10\text{mm unperturbirt} = 9\text{mm}$
 so wäre die äquivalente invers proportionale Erweiterung dazu $q_0 = 1,111 \cdot 10\text{mm} = 11,111\text{mm}$.
 Bei 11,0 mm unperturbirt $1/q_0 = 10\text{mm}$ gibt eine inv. prop. Aufweitung $q_0 = 1,1$ und Dia = 12,1mm.

Zylindrische Rohre und Input Impedanz Magnituden

Der Übergang vom Raum zum Rohr und grundlegende akustische Eigenheiten:



(Links:) Stelle man sich eine Membran (dicht, geschlossen, schwingfähig) in einer Wand eines Raumes vor. Im Raum werden longitudinale Schallwellen, die durch die Membran weitergeleitet werden abhängig von den Dimensionen des Raumes, Position der Membran, der Wellenlänge, usw. teils reflektiert, teils absorbiert und werden wieder auf die Membran treffen, nicht unbedingt mit einem Phasenwinkel, der eine Auslenkung verstärkt, eventuell ist der Phasenwinkel 180 Grad verschoben und wirkt gegen die Auslenkung – es wird bei jeder Frequenz ein anderer Winkel sein. Der Raum hat seine Akustik, Raum-Moden werden für bestimmte Wellenlängen ev. vorteilhaft, für andere ev. nicht sein. Sie werden aber nahezu keine mathematisch harmonische Relationen zu- und untereinander haben.

Befindet sich die Wand im Freien, hätten wir noch immer den Boden als Untergrund, weit entfernte Objekte (vielleicht z.B. Berge) die Echos verursachen, Luftschichten unterschiedlicher Temperatur und vieles mehr. Vermutlich gibt es auch weitere Schallquellen. Der Widerstand gegen eine dreidimensionale Schallausbreitung wird im Raum oder im Freien aber in jedem Fall gering sein, sofern er mit z.B. Luft als Ausbreitungsmedium gefüllt ist. Sofern keine Schockwellen auftreten (z.B. durch Explosionen, etc.) wird sich die Auslenkung der Membran durch die „Umwelt“ in bescheidenen Grenzen halten, es wird von den Vorgängen und seiner Position im Raum bestimmt.

Das komplexe Verhältnis Schalldruck zu Schallschnelle wird als akustische Feld-Impedanz bezeichnet und beschreibt den Widerstand des Übertragungsmediums gegen Schallausbreitung.

(Mitte:) Wir ändern die Geometrie so, daß die Wände nun eine Kegelform annehmen, der Kegel selbst ist wiederum in einem Raum oder im freien Feld. Am offenen Ende entstehen ausschließlich Druckknoten, am geschlossenen (Membran-Ende) bei jenen Frequenzen, die wir als „resonante“ Modes bezeichnen Druckbäuche, bei „Antiresonanzen“ Flussbäuche.

Das Verhältnis von Schalldruck zu Schallfluß in einem Rohr, daß mit einem Übertragungsmedium gefüllt ist wird als akustische Flussimpedanz bezeichnet und bezieht die Querschnittfläche für den Volumenstrom des Schallflusses mit ein. Diese Flussimpedanz ist an jedem Ort und bei jeder Frequenz ein anderer Wert sofern es zu Reflektionen kommen kann. Üblicherweise wird daher die Impedanz am geschlossenen Eingang bestimmt. Input-Impedanz-Magnituden zeigen das Verhältnis über der Frequenz, in einer ev. Kombination mit der Phasenwinkeldifferenz Information über der Frequenz wird es als „Bode“-Diagramm bezeichnet.

In Teil 2 meiner Arbeit sieht man, daß bei einem Frustum = ein Kegel, dessen Spitze fehlt, also ein Kegelstumpf, und bei dem das kleine Ende verschlossen ist (hier unsere Membran), der fundamentale Mode, also die tiefste Resonanzfrequenz nicht die stärkste Impedanzmagnitude hat. Warum das so ist, wird auf den nächsten Seiten möglicherweise ersichtlich werden. Nennen wir diese Rohrgeometrie vielleicht bereits besser einen sich stetig aufweitenden closed-open Zylinder.

Zylinder und Frustum haben keine geänderte Krümmung der Steigung ihres Rohrquerschnittes (2. Ableitung nach dem Ort) und ihre Hornfunktion ist Null. Sie können mit extremen Parametern jeweils auch als Dual eines Besselhorn oder als Salmonhorn beschrieben werden – siehe Kapitel Hörner und Waveguides. Konische Rohre können je nach Anwendungszweck eine große Steigung haben – um möglichst auftretende Reflektionen am offenen Ende und somit stehende Wellen möglichst zu unterbinden, oder eine möglichst geringe Steigung, um die Bildung stehender Wellen zu ermöglichen.

Die Resonanzfrequenzen dieser Geometrie hängen von der Länge der fehlenden Spitze ab, diese wiederum vom Halbwinkel der Steigung der Querschnittfläche und Querschnitt am geschlossenen Ende, und natürlich auch von der Gesamtlänge. Frequenzen auftretender Antiresonanzen hängen kurioserweise nicht davon ab, diese liegen dort, wo sie auch in einem Zylinder mit Steigung 0 = parallelen Rohrwänden auftreten; dort wo am geschlossenen Ende keine Druckbäuche zustande kommen - bei geradzahlig Vielfachen einer „gemeinsamen“ fundamentalen Root-Frequenz.

(Rechts:) Closed-open Zylinder. Eigentlich habe ich bereits alles in den vorangehenden Sätzen beschrieben. Closed-open Zylinder können 1:1 auch als Frustum mit Steigung 0 behandelt werden, die tiefste Resonanzfrequenz entspricht $\frac{1}{4}$ Wellenlänge und hat die stärkste Input-Impedanz Magnitude. Aber wie kommen die Input Magnitudenwerte in akustischen Mega Ohm zustande? Welchen Einfluss hat die Rohrlänge, welchen Einfluss der Rohrquerschnitt, usw.

Diese grundlegenden fundamentalen Eigenschaften von „Quater-Wavelength“ Resonatoren und „Verlusten“ wird in den folgenden Kapiteln schrittweise mit Beispielen aufgearbeitet.

Anschließend folgt eine komplette Aufarbeitung der Auswirkungen von Perturbationen, also lokalen Querschnittänderungen bei closed-open Zylindern und die Grenzen der globalen Auswirkungen auf Resonanzfrequenzen und Input Impedanz Magnituden.

Die Kernaussagen der Sideletter #3 lässt sich auf einige wenige, aber sehr wichtige neue Erkenntnisse reduzieren:

1. Eine charakteristische Frequenz, gebildet aus Dichte der Luft * mittlerer Schallgeschwindigkeit = Phase Velocity beim Zylinder bildet den entscheidenden physikalischen Schlüssel zu allen weiteren Ergebnissen. Sie ist vorerst von Rohrlänge sowie Querschnittflächen und damit von charakteristischer Impedanz als auch Admittance losgelöst. ->> Feldimpedanz Sideletter 1 ~P60.

2. **Die Art und Weise**, mit der man Einengungen und Aufweitungen eines Rohres miteinander vergleicht, ergibt unterschiedliche Ergebnisse, diese sind dadurch nicht falsch, aber ergeben durch die unterschiedliche Art teils sehr widersprüchliche Aussagen, solange man den Kontext nicht erwähnt, der beim Vergleich verwendet wurde:

Art und Weise 1, gefundene Lösung und Ausgangspunkt für weiteren Arbeiten siehe Concept IQ: Nur zueinander invers proportionale Querschnitt Flächenänderungen ergeben gleiches Änderungs-Potential, wodurch Resonanzfrequenzen bei Änderungen stärker vertieft als erhöht werden. Input-Magnituden haben +/- ~ selbes Potential, das globale Potential der Position an aufsteigenden-oder abfallenden Druckbäuche machen einen kleinen Unterschied. Fazit hier: **Durchmesser Verengungen müssen kleiner sein, um mit Aufweitungen vergleichbar zu sein!**

Art und Weise 2, siehe auch HAL #2

Zueinander gleiche = proportionale Querschnittflächenänderungen ergeben sehr starke, aber systematische Differenzen: An Druckbäuchen ist nun Pitchpot Einengung und Aufweitung nicht zufällig gleich, an Druckknoten werden die Differenzen mit der Flächenänderung immer größer.

Art und Weise 3, jeweils gleiche Querschnitt = Durchmesser Differenz +/-:

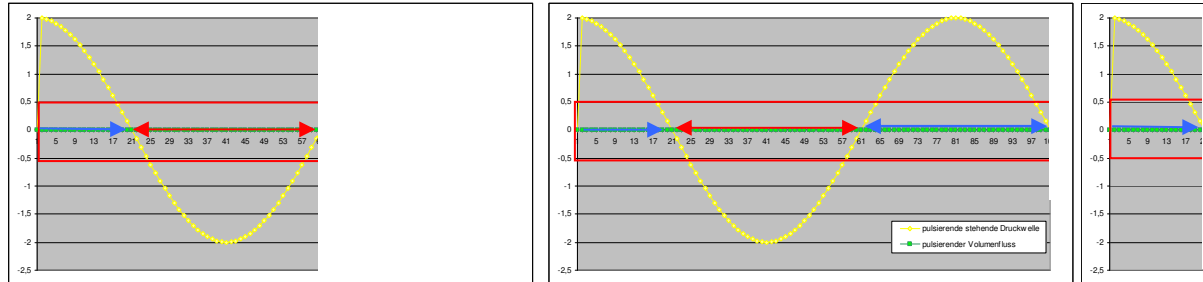
Hier sind die Ergebnisse „intermediate“ zwischen Art 1 und Art 2, aber genauso berechenbar. Aussagen bei dieser Konstellation sind nicht falsch, müssen aber im Kontext genannt werden.

Zylinder – Längenänderungen = Mode # Change

Spezialfall: Perturbationslänge = Rohrlänge = $1/4 \text{ WL}$ = Mode #1

Was passiert, wenn eine stehende Welle mit konstanter Wellenlänge = \sim konstanter Resonanzfrequenz in unterschiedlichen Rohrlängen als höherer Mode auftritt:

(Bei allen Betrachtungen ist die geschlossene Seite in Grafiken immer links; $x=0$
y: Longitudinalwellen sind grafisch als Transversalwellen und deren Auslenkung dargestellt).



| | | | |
|--------------------------------------|---------|---|-----------------------|
| Mode #2 | wäre -> | Mode #3, aber selbe Freq. | bzw. Mode #1 |
| Rohr 0,6m (*1,0 Referenz) | | bei RL 1,0m (*1,666) | bei 0,2m (*0,333) |
| Impedanz Z_{in} | wäre -> | $1/1,666$ * schwächer | $1/0,333$ * stärker |
| $= \sqrt{1/3} = 0,5773$ des Werts | | $\sqrt{1/5} = 0,4472$ des Werts | $\sqrt{1/1} = 1,0$ v. |
| von Mode #1 hier = 1,0 | | von Mode 1 = 0,7745 = 0,346 | Mode #1 = 1,732 |
| Der Abstand <u>aller</u> Druckknoten | -> | bliebe gleich, \sim selbe Frequenz (Endkorrektur, Losses) | |

Ohne Verluste, d. h. ohne Abstrahlung am offenen Ende und ohne viskothermale Verluste an den Rohrwänden, als auch des Mediums selbst wäre die Druckamplitude Faktor 2,0.
(Vor- und rücklaufender Druck, wenn in Phase.)

Wir wissen mittlerweile, es gibt Abstrahlung und es gibt Verluste. Die tatsächliche max. mögliche Magnitude ist daher immer kleiner 2,0, ich normiere das jetzt aber auf Faktor 1,0.

Als Beispiel wähle ich closed-open zylindrische Rohre, einen Durchmesser von 10,00 mm und variable Längen von 0,2-5,0m. 0,2m = $1/5$ Länge, 1,0m = Vergleichsbasis, 5,0m = *5.

Eine stehende Welle mit einer $1/4 \text{ WL}$ von 0,2m ergibt bei 343 m/s mittlerer Schallgeschwindigkeit eine Frequenz von $\sim 424 \text{ Hz}$. (Open-End Korrektur und Verluste werden nun vorerst ignoriert).

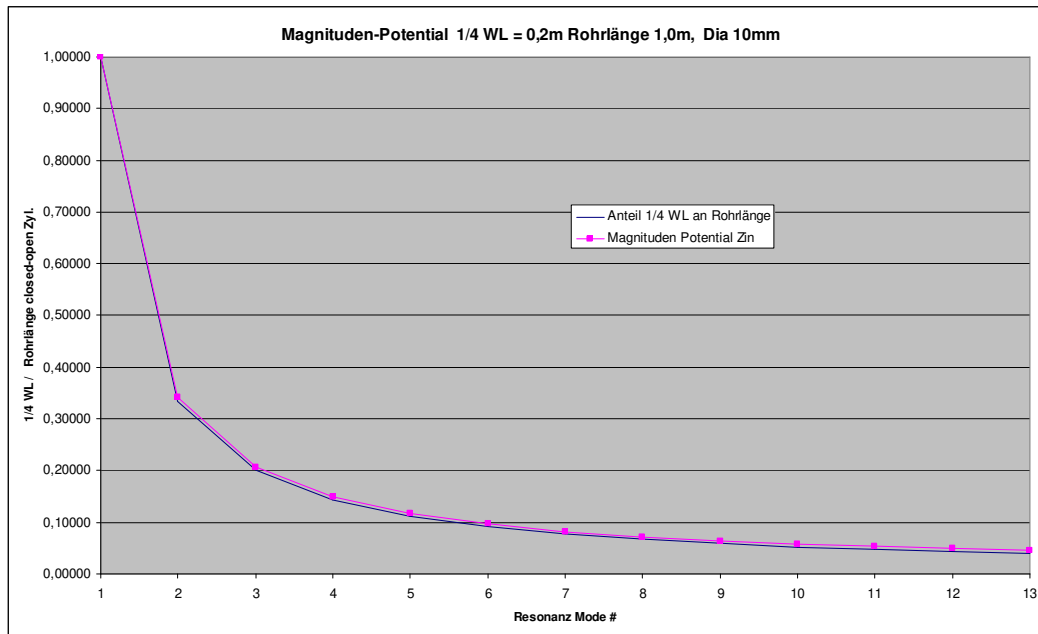
Das kürzeste Rohr, wo diese stehende Welle auftreten kann ist ein closed-open Zylinder mit einer Länge von 0,2 m = $1/4$ Wellenlänge, die Welle die sich ausbilden kann ist hier Resonanz Mode #1.

| | |
|---|--|
| Rohrlänge = $1/4$ Wellenlänge | = $1 \cdot 0,2\text{m} = 0,2\text{m}$, gibt Mode #1 |
| Die nächste Rohrlänge wäre $1/2$ Wellenlänge länger | = $3 \cdot 0,2\text{m} = 0,6\text{m}$, gibt Mode #2 |
| 1,0 m Rohrlänge | = $5 \cdot 0,2\text{m} = 1,0\text{m}$, gibt Mode #3, usw. |
| 5,0 m Rohrlänge | $25 \cdot 0,2\text{m} = 5,0\text{m}$, gibt Mode #13 |

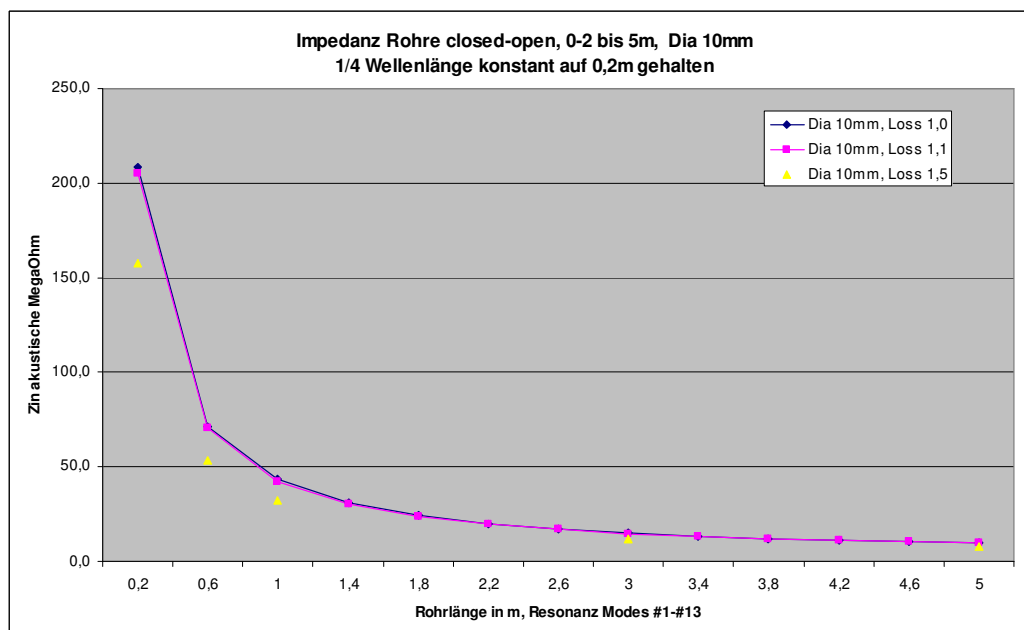
Simuliert man solche Rohrlängen (ART, Modell ebene Wellen, Radiation Impedanz Modell Levine/Schwinger), so ergibt sich als Input Magnitude Z_{in} ein max. Magnitudenwert, der

| | | | |
|--------------------------------------|----------|------------|--------------------------|
| bei 0,2m Rohrlänge $1/4 \text{ WL}$ | Mode #1 | 208,5 MOhm | ~ 5 x stärker |
| bei 0,6m Rohrlänge $3/4 \text{ WL}$ | Mode #2 | 71,4 MOhm | $\sim 1,66$ x stärker |
| bei 1,0m Rohrlänge $5/4 \text{ WL}$ | Mode #3 | 43,2 MOhm | 1,0 |
| bei 5,0m Rohrlänge $25/4 \text{ WL}$ | Mode #13 | 9,7 MOhm | ~ 5 x geringer ist. |

Der Anteil einer $1/4$ Wellenlänge an der Rohrlänge (und umgekehrt) entscheidet also wesentlich die mögliche Magnituden Maxima, das Verhältnis von Druck zu Fluss am geschlossenen Ende.

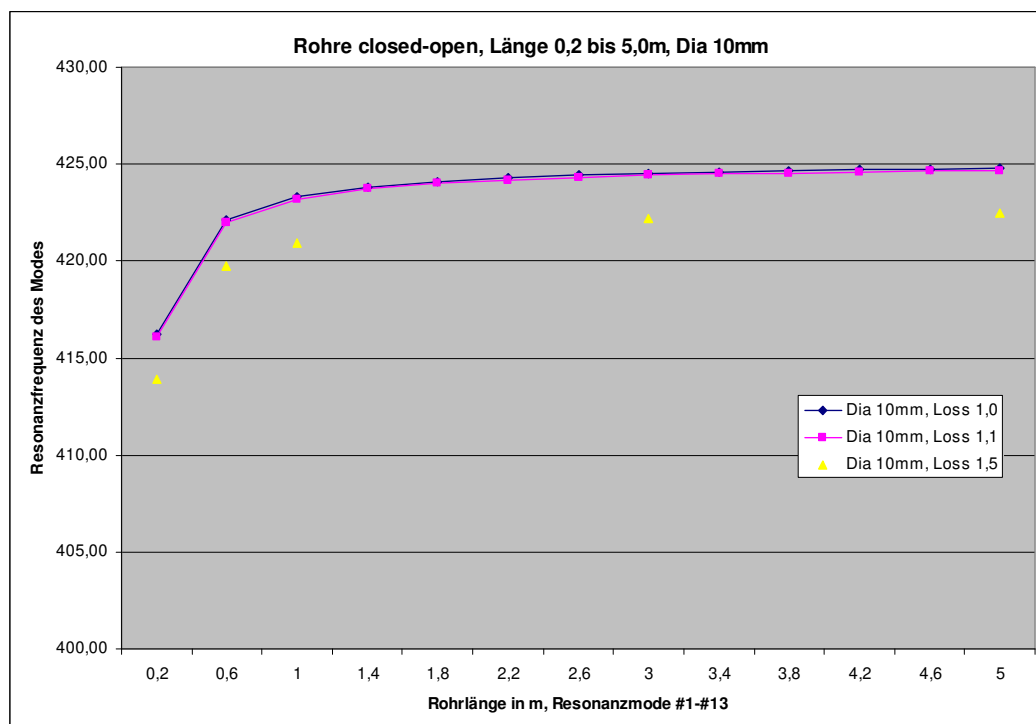


Die Abstrahlungsverluste und somit nicht reflektierter Anteil bleiben in diesem Fall immer gleich, es ändern sich also die Verluste anhand Reibung ~ proportional zur Wellenlänge bzw. invers proportional zur Frequenz.



0,8m Wellenlänge in unterschiedlichen Rohrlängen, 0,2-5,0m, x= Resonanz Mode #, y= Peak Impedanz Magnitude in Mohm (mit unterschiedlich modellierten zus. Verlusten)

Auswirkung von unterschiedlichen zusätzlich modellierten Verlusten, der Loss-Faktor entspricht nicht der Input Magnitudenänderung, ein Loss Faktor 1,1 ergibt nur rund -1,5% geringere Magnituden, Loss Faktor 1,5 aber ca. -25%, (Loss Faktor 2,0 aber ca. 40-60%.)



Die Effekte der Endkorrektur sind bei allen Rohrlängen gleich groß (lang), das bedeutet bei langen Rohrlängen wird die Endkorrektur immer geringer, die akustisch wirksame Mehrlänge nimmt ab.

Generell kann gesagt werden, umso kürzer ein Zylinder ist, umso tiefer und inharmonischer ist er. Durch berechnete höhere Verluste wird er ebenfalls tiefer, aber geringfügig harmonischer.

Spinnt man die Idee weiter, probiert etwas herum und ändert die Rohrlänge

| Rohrlänge * | gibt Frequenz * | Magnitude * |
|-------------|-----------------|-------------------------------|
| 0,25 | $1/0,25 = 4$ | $\sqrt{(4)} = 2,0$ |
| 0,333 | $1/0,333 = 3$ | $\sqrt{(3)} = 1,732$ |
| 0,5 | $1/0,5 = 2$ | $\sqrt{(2)} = 1,4142$ |
| 1,0 | $1/1$ | $\sqrt{(1)} = 1,0$ |
| 2,0 | $1/2 = 0,5$ | $\sqrt{(1/2)} = 0,7071$ |
| 3,0 | $1/3$ | $\sqrt{(1/3)} = 0,5773$ |
| 4,0 | $1/4$ | $\sqrt{(1/4)} = 0,5$ |
| 5,0 | $1/5$ | $\sqrt{(1/5)} = 0,4472$ |
| 10 | $1/10$ | $\sqrt{(1/10)} = 0,3162$ usw. |

stellt man fest: Mit **Vervierfachung** der Länge halbiert sich die Input-Impedanz-Magnitude --> (bei dann 4 x geringerer Resonanzfrequenz = 2 Oktaven tiefer, egal welcher Mode)

Man kann das jetzt auf die höheren Resonanzpeaks im selben Rohr wie folgt umlegen:

Zin Magn. Pot. hier:

in einem closed-open Rohr --> Mode #1 = $\frac{1}{4}$ Wellenlänge $\sqrt{(1)} = 1,0$
 Mode #2 hier = wäre Mode #1 in einem 3x kürzeren Rohr, $\frac{3}{4}$ WL $\sqrt{(1/3)} = 0,5773$
 Mode #3 hier = wäre Mode #1 in einem 5x kürzeren Rohr, $\frac{5}{4}$ WL $\sqrt{(1/5)} = 0,4472$ usw.

Bezogen auf den 1. Versuch mit unterschiedlichen Rohrlängen lassen sich die theoretischen Magnitudenwerte der restlichen Resonanzfrequenzen ermitteln:

| Rohrlänge | | gemessen | | errechnet (Ergebnis Simulation)* |
|-----------|-------------------------|-----------|-----------|----------------------------------|
| 0,2m | Mode 1 $\frac{1}{4}$ WL | 208 Mohm | /1,0 = | 208 Mohm für Mode #1 |
| 0,6m | Mode 2 $\frac{3}{4}$ WL | 71,4 Mohm | /0,5773 = | 123,7 Mohm für Mode #1 (125)* |
| 1,0m | Mode 3 $\frac{5}{4}$ WL | 43,2 Mohm | /0,4472 = | 96,7 Mohm für Mode #1 (97)* |

Diese Berechnung kommt also schon sehr nahe, wobei eine Magnituden Erhöhung durch Verkürzung etwas weniger stark ausfällt, Reduktion durch Verlängerung ebenfalls etwas reduziert (1-3 %), welches offensichtlich die Abstrahlung und Endkorrektur ausmacht.

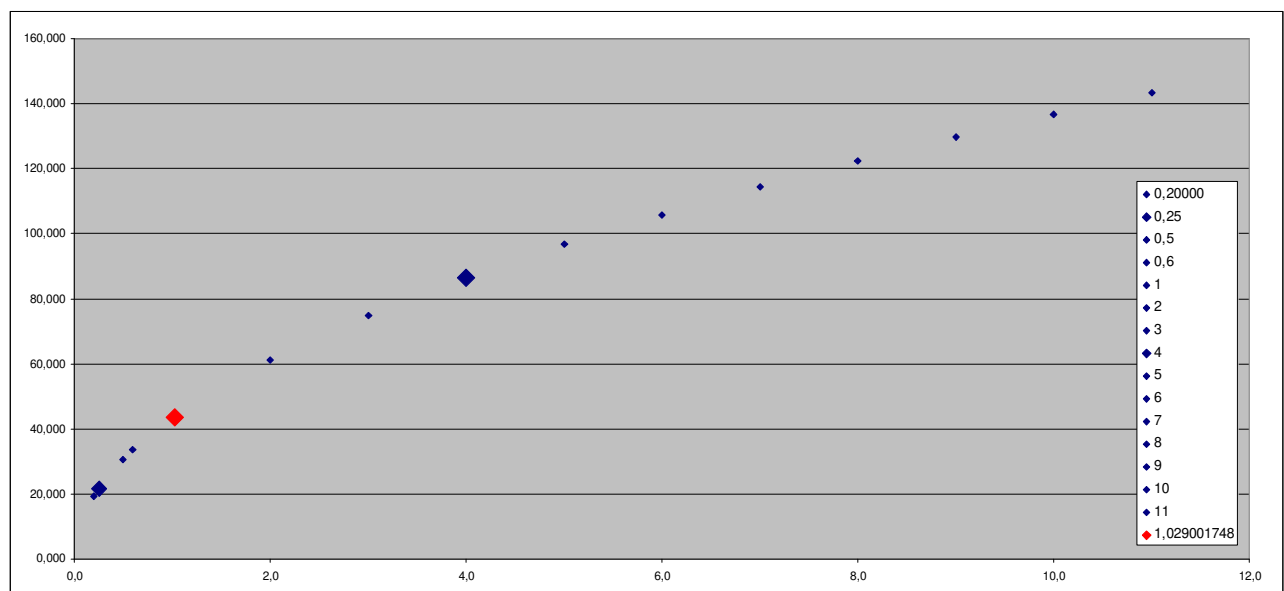
Die Magnituden Hüllkurve in einem closed-open Rohr nimmt mit dem Kehrwert ($1/\sqrt{\text{Frequenz}}$) ab. Wobei hier noch ein Korrekturfaktor für den stärksten Mode (#1) ermittelt wird damit dieser auf 1,0 normiert ist: $1/\sqrt{\text{Resonanzfrequenz Mode \#1}}$

$$83 \text{ Hz} \rightarrow 1/9,11 \text{ Hz} = 0,109$$

somit ergibt sich für ein Rohr mit 1m Länge,

| | |
|--|--|
| Mode #1: $\sqrt{83 \text{ Hz}} = 9,11 * 0,109 = 1,0$ | Referenzwert max Peak #1=1 ($=\sqrt{1/1}$) |
| Mode #2: $\sqrt{253 \text{ Hz}} = 15,9 * 0,109 = 1,7459$ | Kehrwert = Magn.Pot. = 0,577 ($=\sqrt{1/3}$) |
| Mode #3: $\sqrt{423 \text{ Hz}} = 20,5 * 0,109 = 2,2575$ | Kehrwert = Magn.Pot. = 0,447 ($=\sqrt{1/5}$) |
| Mode #4: $\sqrt{594 \text{ Hz}} = 24,3 * 0,109 = 2,675$ | Kehrwert = Magn.Pot. = 0,377 ($=\sqrt{1/7}$) |

Ein Rohr doppelter Länge ergibt ~halbe Frequenzen = 1 Oktave tiefer und Magnituden, die um den Faktor ~0,7071 geringer wären. Die Kontrolle Rechnung gegen Simulation zeigt, daß auch hier die Abweichung max. 3% geringere Magn. lt. Rechnung gegenüber der ART Plane Wave Simulation beträgt.



x=Frequenzfaktor, y= Zin Peak Mohm

Rot: Rohrlänge 1,0m Dia 10mm, charakt. Frequenz $p \cdot c = 411,389 \text{ Hz} = 43,69 \text{ Mohm}$

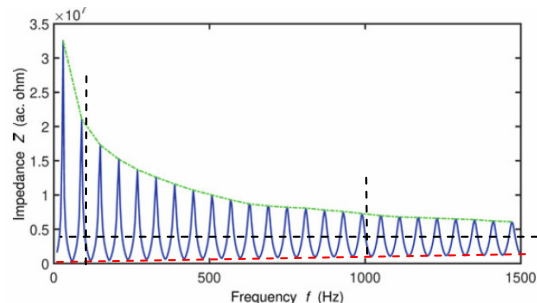
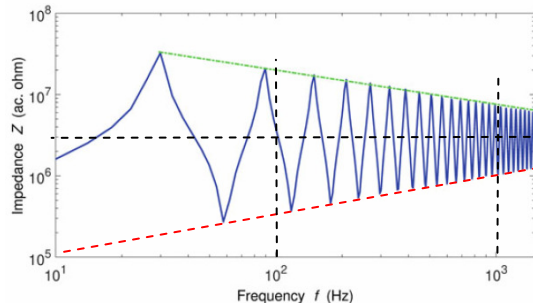
Blau: bei $\frac{1}{4}$ Rohrlänge ist die Input Impedanz Magnitude doppelt so groß; Frequ. *4

bei 4-facher Rohrlänge ist die Input Impedanz Magnitude halb so groß, Frequ. /4.

Mode #3 ist hier Längenfaktor 1,0 = 0,8m Wellenlänge.

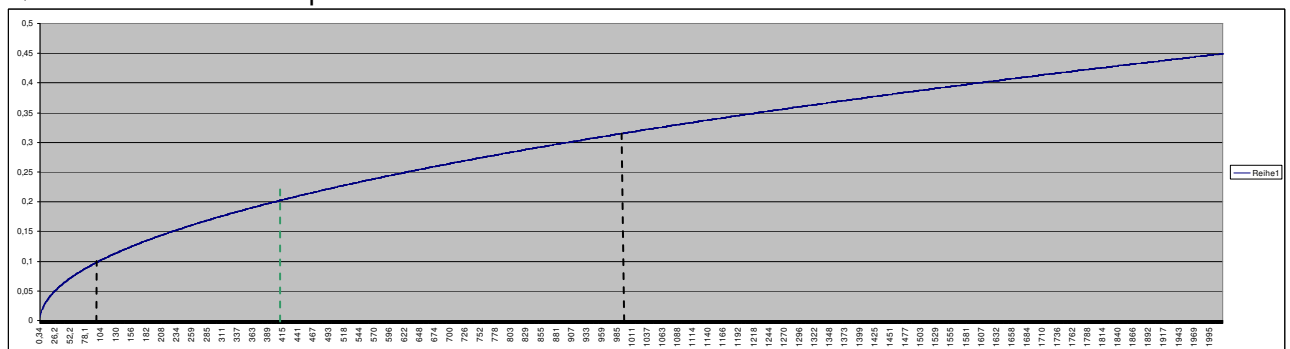
Zylinder – Peak Magnitudenwerte generell / Viskothermale Verluste

Ob eine gegebene Verteilung durch eine Potenzfunktion angenähert werden kann, zeigt sich bei einer doppelt-logarithmischen Auftragung: Ist der Graph der Funktion eine Gerade, so ist eine Näherung durch eine Potenzfunktion möglich. Die Steigung der Geraden ist dann ihr Exponent.



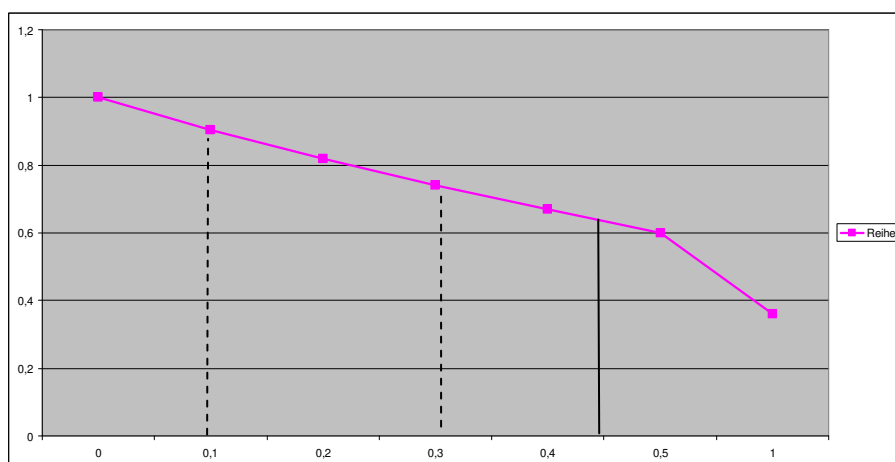
Rohrlänge hier ~2,8m -> Res. Mode #1 ~30 Hz, Mode #2 ~90 Hz; Mode #17 ~1000 (10³) Hz.

Die Impedanz Peak-Magnituden nehmen mit der Frequenz ab. Der Zusammenhang zwischen der „Abkling-Konstante“ a und der Frequenz f folgt dem Potenzgesetz $a=A \cdot f^n$ wobei A (Amplitude) und n Konstanten sind. Es kann aus der geraden Linie in der doppelt logarithmischen Ansicht davon ausgegangen werden, daß $n \approx 0,5$ was bedeutet, daß die Verlusteffekte \sim mit der Quadratwurzel der Frequenz zunehmen: $a = A \cdot \sqrt{f}$



$a=0,01 \cdot \sqrt{f}$ = Abklingkonstante als Faktor. 100 Hz=0,1 1000 Hz=0,316 2000 Hz=0,447 $p^*c=0,2$

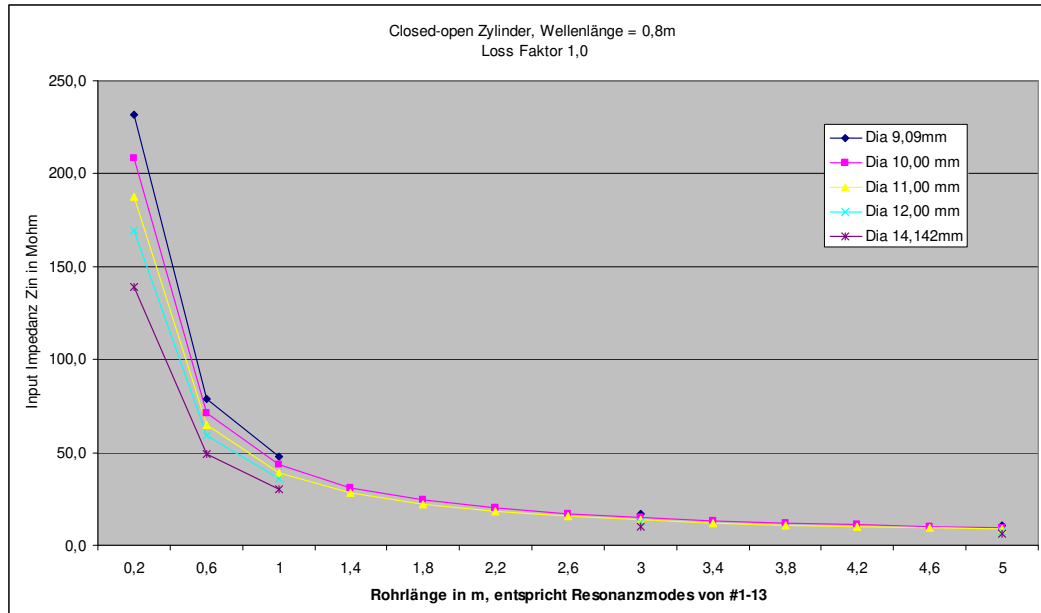
Die abnehmenden Magnitudenwerte höherer Modes werden durch viskothermale Verluste als Funktion der Frequenz beschrieben. Der Effekt dieser Verluste reduziert die Amplitude einer Druckwelle im Rohr bei einer Bewegung um eine Distanz s in Metern um den Faktor e^{-as}



$x =$ Abklingkonstante $a = 0,01 \cdot \sqrt{f}$, $y =$ reduzierte Druckwellenamplitude nach jeweils $s=1m$ Distanz, durch laminare, viskothermale Verluste an Rohrwandungen als Funktion der Frequenz.
bei 100 Hz 10% Reduktion bei 1000 Hz 31,6% Reduktion, bei 2000 Hz 44,7% auf 1m Rohrlänge.

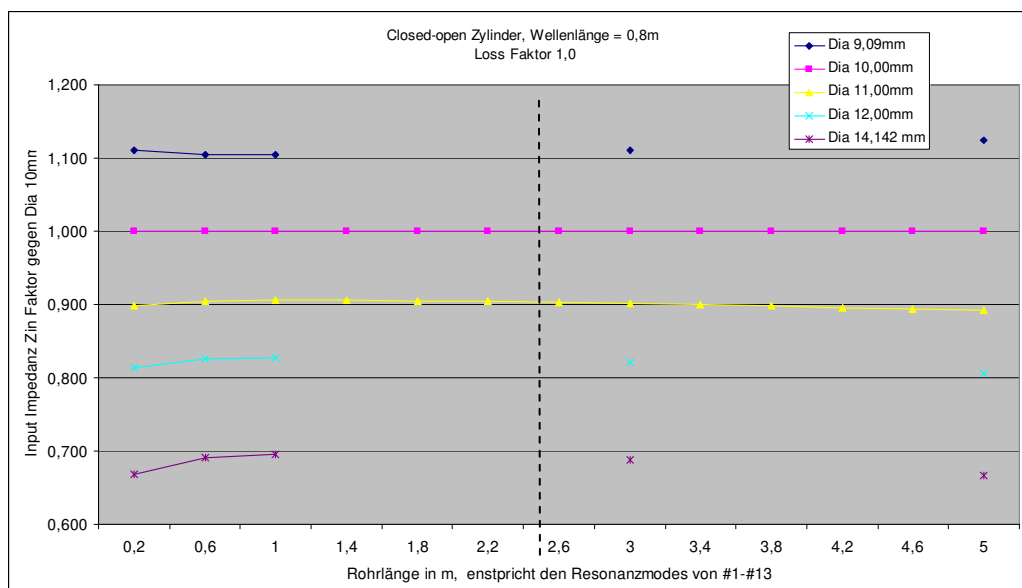
Zylinder – Querschnitt / Boresize / Mensur Änderungen:

Hier kann gesagt werden, daß Querschnittänderungen, wenn Sie zentriert zwischen Druckbauch und Flußbauch liegen und zudem $\frac{1}{4}$ Wellenlänge betragen, Änderungspotential $1/\sqrt{q_0^2}$ haben, also wenn der Querschnitt des gesamten Rohres geändert wird. Das ist aber nicht das max. mögliche Änderungspotential u_p/d_n , dieses liegt (invers) bei q_0^3 , die Spanne möglicher Änderungen = q_0^4 .



Ist der gesamte Rohrquerschnitt enger, dann ist die charakteristische Impedanz und somit das geometrische Mittel höher: $\rho \cdot c / S$ Dichte * Geschwindigkeit / Fläche
Eine Einengung nach einem Druckbauch bewirkt höhere Impedanz Magnituden Werte.

Ist ein Rohrquerschnitt weiter, ist die Fläche größer und die charakt. Impedanz kleiner.
Eine Aufweitung nach einem Druckbauch bewirkt geringere Impedanz Magnituden Werte.



Wird der gesamte Querschnitt abgeändert, entspricht das Peak Magnituden Änderungspotential $1/q_0$ d.h. invers proportional zum Faktor der Querschnittenerweiterung (Durchmesser, Radius) bzw. $1/\sqrt{q_0^2}$ (Faktor der Flächenänderung).

q_0 = Faktor Dia geändert / Dia Vergleich

q_0^2 = Faktor Fläche geändert / Vergleichsfläche

Dies gilt immer nur, solange die Rohrlänge im Verhältnis zum Querschnitt ~ „sehr“ groß ist.

Der nur 20 cm lange Zylinder hat dieses Prädikat sehr lang und eng nicht mehr, was sich speziell beim Diameter Faktor $1/q_0=0,7071$ doppelte Querschnittfläche bemerkbar macht. RL200/Dia 7 mm = 28,5. Wird die Rohrlänge vergleichsweise lang > 2m, $\sim 2500/10=$ Verhältnis 250 bzw. Mode #6, bzw. Rohrlängenfaktor $\sim 2,5$, dann zeigen sich invers Abweichungen gegenüber 1000/10mm.

Die errechneten charakt. Impedanzwerte für obige Beispiele lauten mit Dichte Luft $1,196 \text{ kg/m}^3$ und (mittlerer) Schallausbreitungsgeschwindigkeit 344 m/Sek. $\rho \cdot c = 411,39$ bei $\sim 23 \text{ Grad C}$:

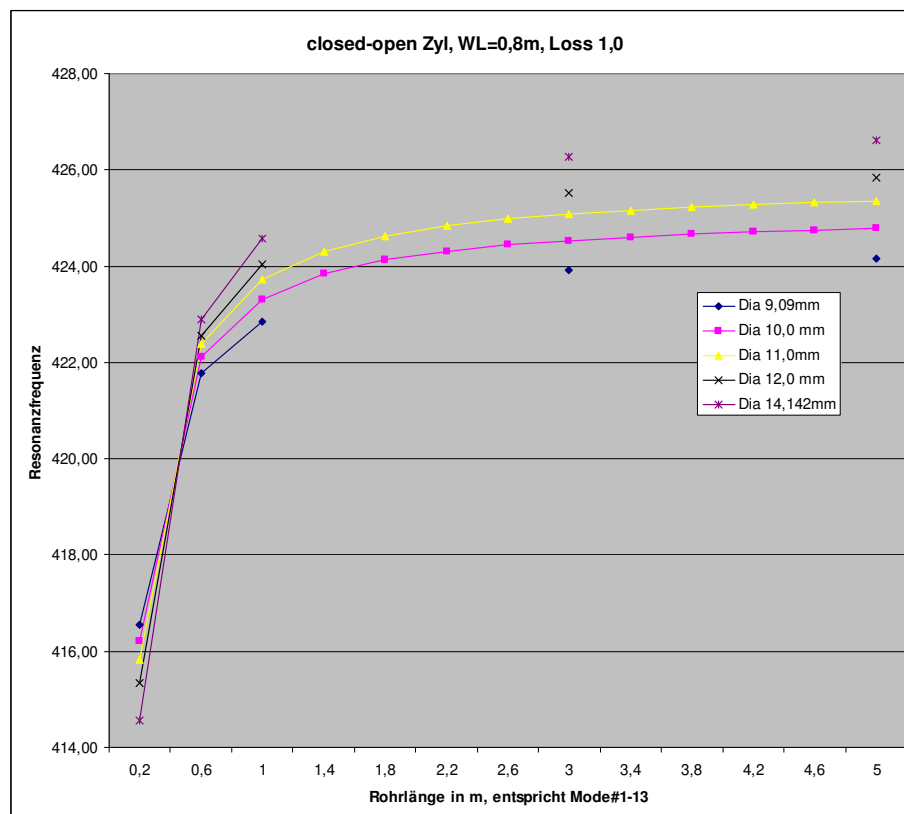
Magnituden bei 1m RL und 0,8m Wellenlänge = $5/4 \text{ WL}$ im Rohr = Mode #3, $\sim 423 \text{ Hz}$

| Dia | $Z_c \text{ Mohm}$ | $1/q_0^2$ | $1/q_0$ | | Mohm |
|----------|--------------------|-----------|-----------|--------|-------|
| 9,09mm | 6,34 | 1,21 | = *1,1 | *1,104 | 47,72 |
| 10mm | 5,24 | 1,0 | = 1,0 | *1 | 43,23 |
| 11mm | 4,33 | 0,8264 | = *0,9090 | *0,906 | 39,15 |
| 12mm | 3,64 | 0,6944 | = *0,8333 | *0,827 | 35,75 |
| 14,142mm | 2,62 | 0,5 | = *0,7071 | *0,696 | 30,06 |

so berechnete Potential Änderung durch Querschnitt gegen Dia 10mm, Ergebnis Simulation

Z_{max} Diff.-Faktor = $1/q_0^1$ Z_{char} Diff.-Faktor = $1/q_0^2$ Z_{min} Diff.-Faktor = $1/q_0^5$

Rohrlänge zu Boresize = Mensur und Resonanzfrequenzen höherer Modes



Eine kleinere Bohrung ergibt tiefere Resonanzfrequenzen, eine größere Bohrung höhere Frequenzen, aber nur wenn die Rohrlänge noch „sehr“ lang im Vergleich zum Querschnitt ist. Die gefundene Schwelle liegt grob bei Faktor $> \sim 33,3$ aus Rohrlänge / Durchmesser. Hier bei Rohrlängen $< 600 \text{ mm}$, mit RL 200mm = Mode #1 bzw. $1/4 \text{ WL}$; Faktoren nur 28-14 mit $q_0^2=0,5-2$. Um so länger das Rohr ist, desto schwächer fällt dann auch eine „Endkorrektur“ (Vertiefung) aus. Es folgt ein Kapitel, wo Resonanzfrequenzänderung mit Querschnittänderung aufgearbeitet ist.

Wie kommt man generell auf die Magnitude der Peaks in akustisch MegaOhm?

Nun, es ist der Betrag des komplexen Widerstands bestehend aus Real- und Imaginärteil, des weiteren ist die Impedanz vom Querschnitt abhängig, die char. Impedanz ist über die Querschnittfläche definiert, ebenso über Dichte * Schallgeschwindigkeit, es hängt von der Rohrlänge ab, von der Abstrahlung und von Verlusten im Rohr.

Bei einem 10mm Rohr (unendlicher Länge) beträgt die char. Impedanz Z_c 5,238 MegaOhm. Peak #1 im 1,0m langen Rohr wurde mit Magnitude 97,7 MegaOhm ermittelt, ergibt einen q_1 Faktor von 18,67 von Mode #1. (Um diesen Faktor ist der Peak Z_{max} größer als Z_c).

Von der Länge weiß ich, daß eine Verdoppelung die Magnitude um 0,7071 reduzieren würde, allerdings wäre die Resonanzfrequenz dann mit dieser Magnitude 1 Oktave tiefer. Mit halber Länge = 1 Oktave höherer = Magn. *1,41, Geomittel ist wieder 1,0 bei der Referenzlänge.

Die Länge hilft also definitiv schon weiter, weil eine bestimmte char. Impedanz Z_c bei einem bestimmten Frequenzwert gleich Geomittel 1,0 ist. Ich versuche es mit $\rho * c$ = Geomittel 1,0 mit einem bestimmten Magnitudenwert in Mohm, der vom Querschnitt abhängen muß.

Die charakteristische Impedanz Z_c besteht aus Dichte * Schallgeschwindigkeit / Querschnittfläche. Lassen wir den Fläche beseite, ergibt sich die spezifische Impedanz, die von der Dichte und Schallgeschwindigkeit abhängt. Dichte ρ 1,959 kg/m³ * mittlere Schallgeschwindigkeit 344 m/Sek. gibt eine charakteristische Frequenz cF von ~411,39 Hz. Alle folgenden Berechnungen werden von dieser charakteristischen Frequenz, der Rohrlänge und dem Querschnitt abhängen.

Die notwendigen Werte und Beispieldaten Diameter 0,011m, Rohrlänge 1m ergeben sich zu:

Charakteristische Frequenz = Dichte ρ * Schallgeschwindigkeit c 411,39 Hz

Charakteristische Impedanz (Wl bzw. Z_c) = ($\rho * c$ / Querschnittfläche in m) / 100³ = 4,33 Mohm
 $(1/\sqrt{Z_c}) * 100 = Z_{max} * q_0^2$
 = 0,4806*100=48,06 Mohm bei cF , Dia11mm; $q_0^2=1,21$
 = 0,4368*100=43,68 Mohm bei cF , Dia10mm; $q_0^2=1,00$

$1/(Länge * Dia^2)/(100^2)$ = 1/0,00121 = 8264,46 / 10.000 = 0,8264 = $1/q_0^2$ Faktor
 $1/(Länge * Dia^2)/(100^2) * [(1/\sqrt{Z_c}) * 100]$ = 0,8264 * 48,06 = 39,72 Mohm bei cF , Dia 11mm.

Wird die Länge auf 1,0m normiert, $1/[(\text{Querschnittfaktor})^2]$ ergibt das den inversen Flächenfaktor gegenüber einer Fläche von 1,0² d.h. $1/q_0^2$; es folgt:

$1/q_0$ entspricht $1m/0,01m = 100$, der notwendige Umrechnungsfaktor bei Magnituden ist keine Funktion einer Fläche sondern Querschnittänderung, daher Wurzel daraus = $1/q_0$.
 für Megaohm = $(100^4) / 100 = 100^3 = 1,000.000$. Weiters $1*100/10.000 = 1/100$; $1*q_0/q_0^2 = 1/q_0$.

D. h. die charakteristische, maximale (Fluss)-Impedanzmagnitude der charakt. Frequenz anhand der charakteristischen Impedanz, diese wiederum anhand Dichte ρ des Mediums und mittlerer Schallgeschwindigkeit c , sowie der Rohrlänge anhand der Dimensionen Querschnitt- und Länge, normiert auf 1m Rohrlänge, ohne Berücksichtigung von Abstrahlung und Endkorrektur:

Var. 1: $[(1/\sqrt{Z_c}) * 100]$ * $1/q_0^2 = Z_{max}$ 39,72 Mohm bei charakt. Frequ. = 411,39 Hz.*
 Var. 2: $[1/(1 * Dia \text{ in m})^2] / \sqrt{Z_c \text{ in MOhm}}$ / 100 = $Z_{in \text{ max.}}$ in Mohm bei cF
 Var. 3: $[1/(1 * Dia \text{ in m})^2] / \sqrt{Z_c \text{ in Ohm}}$ * 10 = $Z_{in \text{ max.}}$ in Mohm bei cF
 Var. 4: $[1/\sqrt{Z_c \text{ in Mohm}}] / (1 * Dia \text{ in m})^2$ / 100 = $Z_{in \text{ max.}}$ in Mohm bei cF
 Var. 5: $[1/\sqrt{Z_c \text{ in Ohm}}] * 1/(1 * Dia \text{ in m})^2$ * 10 = $Z_{in \text{ max.}}$ in Mohm bei cF

*wobei cF = charakteristische Frequenz in Hz = spezifische (Feld-)Impedanz in Pa*s/m⁴:

Spezifische Impedanz Medium = Dichte kg/m^3 * Schallgeschwindigkeit c in m/s
 = Feld- oder Kennimpedanz = Druck N/m^2 / Schallschnelle v in m/s
 die Einheit ist $\text{kg} * \text{s} / \text{m}^2$ = $\text{Pa} * \text{s} / \text{m}^3 = \text{N} * \text{s} / \text{m}^3 = cF$ charakt. Frequenz in $\text{Hz} = 1/T$ in s
 -> Flussimpedanz Z in Rohren = $\text{Pa} * \text{s} / \text{m}^3 = \text{N} * \text{s} / \text{m}^3$, mit char. Imp. Z_c = spezif. Imp. / Fläche

Bei abweichenden Rohrlängen zu 1,0 m ändert sich der Magnitudenwert der char. Frequenz um Faktor $\sqrt[3]{(1/\text{Rohrlängenfaktor zu } 1\text{m})} = \sqrt[3]{(1/\text{Rohrlänge in m})}$ ist gleich $= 1/\sqrt[3]{\text{Rohrlänge in m}}$ das bedeutet z.B. jeweils eine Verdoppelung bzw. Halbierung bei 4 oder $1/4$ facher Rohrlänge,

sowie der Frequenzfaktor zur charakteristischen Frequenz anhand Frequenz * Rohrlänge in m

Somit können die Hüllkurvenwerte der Impedanzmaxima jeder beliebigen Frequenz unter Berücksichtigung der char. Impedanz anhand der Rohrquerschnittfläche berechnet werden:

Input Impedanz Maxima – Hüllkurvenwerte = Maxima Werte:

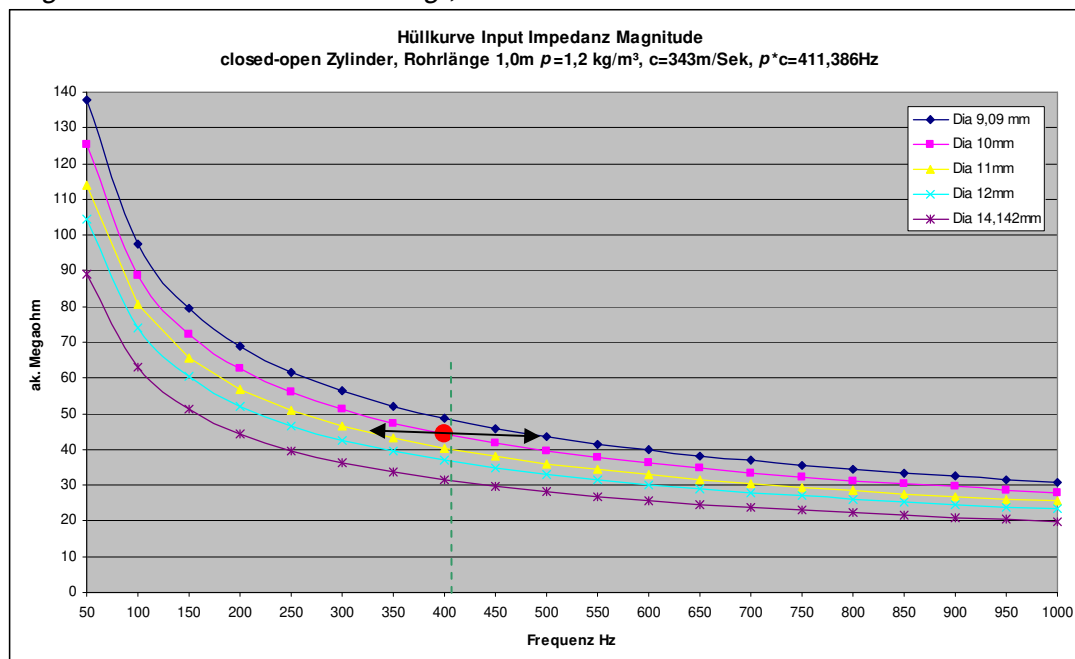
$[1/\sqrt[3]{(\text{beliebige Frequenz} * \text{Rohrlänge in m} / \text{char. Frequenz } 1\text{m})}] * [\text{char. Magnitude der char. Frequenz } 1\text{m}]$
 * $[1/\sqrt[3]{\text{Rohrlänge in m}}]$

Da die charakteristische Impedanz Z_c im closed-open Zylinder bei allen Frequenzen ~gleich bleibt, können daraus nun auch die zu erwartenden ~Minima Hüllkurven sehr einfach berechnet werden:

Input Impedanz Minima–Hüllkurven = Z min: $Z_c/(Z_{\text{max}}/Z_c)$; wobei $Z_{\text{max}}/Z_c = q_1$; $Z_{\text{max}} / Z_{\text{min}} = q_1^2$

| Kontrollrechnung gegen ART Simulation ebener Wellen, Loss Faktor 1,0 closed-open Zylinder: | | | | |
|--|-----------|----------------|------------|------------------------|
| Rohrlänge, Durchmesser | Frequ. Hz | Impedanz Magn. | Simulation | lt. obiger Berechnung: |
| 1,0m, Dia 10mm, Mode #1 | 83,0 | | 97,7 Mohm | 97,2 Mohm Abweich. |
| 1,0m, Dia 10mm, Mode #9 | 1450,1 | | 22,95 | 23,27 ~+1% |
| 3,0m Dia 10mm, Mode#1 | 27,0 | | 57,31 | 56,8 |
| 2,0m Dia 12mm, Mode#12 | 982,3 | | 12,02 | 11,78 ~-2% |
| 0,6m Dia 11mm, Mode #2 | 422,39 | | 64,64 | 65,33 ~+2% |

Wird die Rohrlänge sehr kurz, wirkt die Endkorrektur ZL offener Enden stärker, diese wurde in der obigen Formel nicht berücksichtigt; bei Simulation aber nach Modell Levine/Schwinger berechnet.



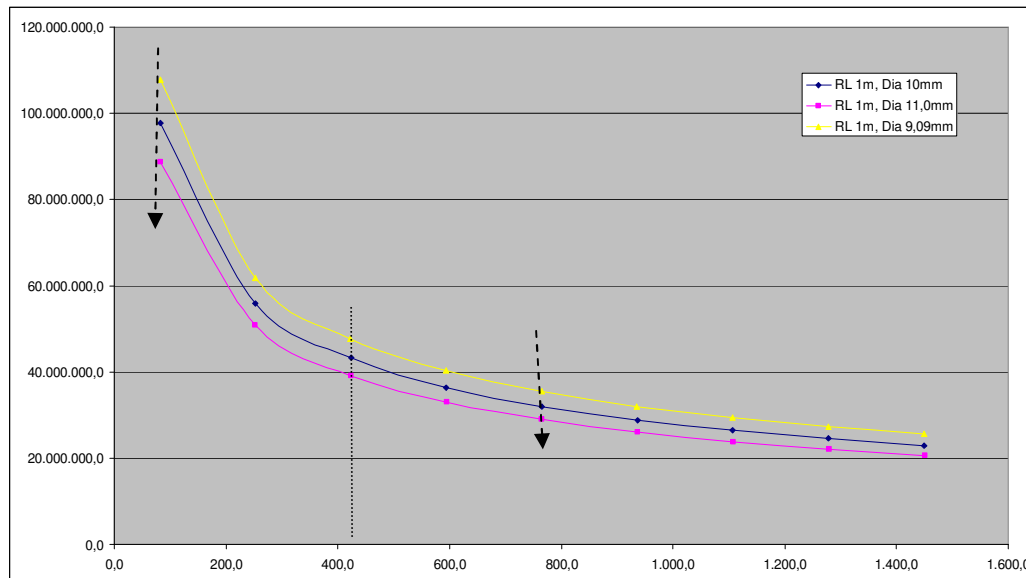
Rot: Rohrlänge 1,0m Dia 10mm, char. Frequenz $\rho * c = 411,39 \text{ Hz} = 43,69 \text{ Mohm}$, x Werte je 50 Hz
 Schwarze Pfeile: unterschiedliche Querschnitte geben gleiche Magnituden bei anderen Frequenz

Zusammenhänge zwischen Rohrlänge, Querschnitt, Frequenz und Magnitude:

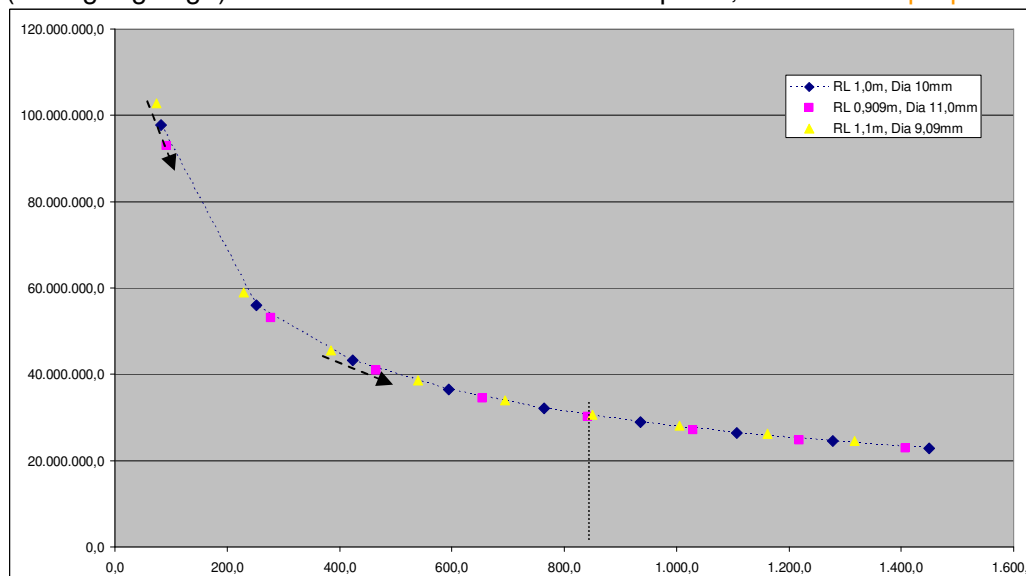
In der vorigen Grafik und Hüllkurven Berechnung wurde die Rohrlänge nicht verändert, unterschiedliche Querschnitte geben idente Magnitudenwerte bei anderer Frequenz,

ein kleinerer Durchmesser ergibt eine Magnitude \geq (noch) bei einer höheren Frequenz,
ein größerer Durchmesser ergibt eine Magnitude = (nur) bei einer geringeren Frequenz.

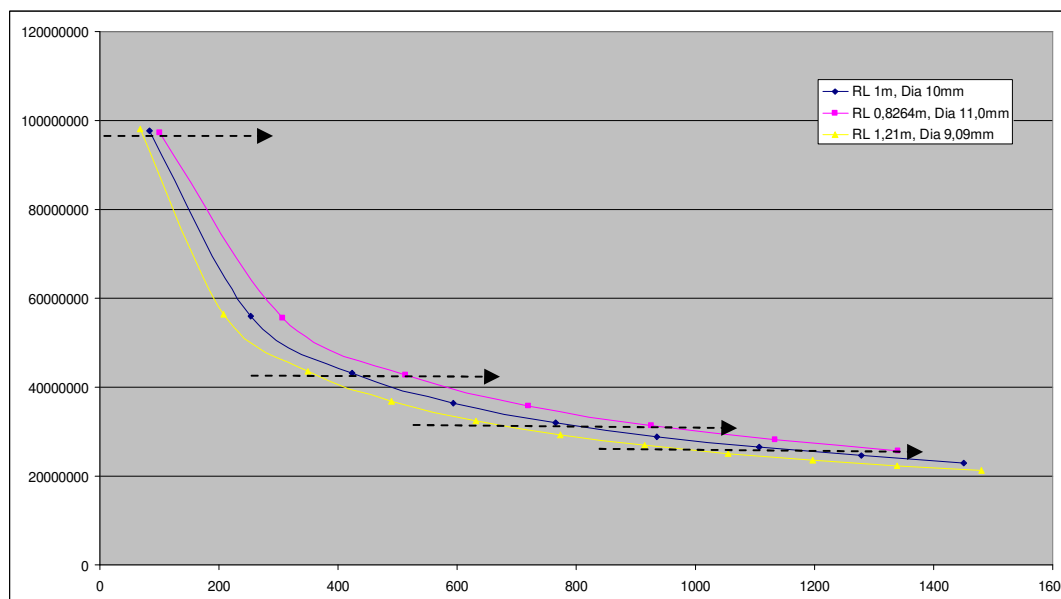
Durch Änderung der Rohrlänge = Änderung der Frequenz auftretender Resonanzen und / oder durch Änderung des Rohrquerschnittes kann die Magnitudenhüllkurve und somit die Magnitude einer bestimmten (gewünschten) Resonanzfrequenz gezielt errechnet und manipuliert werden:



Bei selber Rohrlänge: Magnitudenfaktor $q_1 = 1 / \text{Querschnitt Faktor} = 1/q_0$
(=Ausgangslage) Modes mit ~ beinahe selber Frequenz; $\rightarrow Z_{\max}$ inv. prop. zu Dia. q_0



Mit Rohrlängenänderung: invers zu Durchmesserfaktor mit Rohrlänge $/q_0$
sowie Querschnittänderung: invers zu Rohrlängenfaktor und Durchmesser $*q_0$
gibt Frequenzänderung = invers zur Rohrlängenänderung = $*q_0$, gegenüber einer Referenz $q_0=1$.
[Magnitudenänderung Faktor ist ~ Wurzel aus q_0 , der Faktor steigt mit Frequenz und abfallender Magnitude auf ~1,5x Wert bei ~1500 Hz]. Das Ergebnis wäre eine „gemeinsame Hüllkurve“!
Mode #5 Dia 11mm hätte ~eine vergleichbare Frequenz und Magnitude wie Mode #6 Dia 9,09mm.
Referenz $1=RL1m / q_0=1$ **RL/ q_0 (higher Pitch) sowie Dia $*q_0$ (lower Z_{\max}) = same Envelope!**



Gleiche Mode # mit gleicher Magnitude, Punkte sind Peaks (Resonanzfrequenzen)
 q_0 = Durchmesser Faktor, q_0^2 der Querschnitt-Flächenfaktor, $1/q_0^2$ invers Längenfaktor

Referenz: Ein Rohr mit einem Durchmesser von 10,0mm und einer Länge von 1000 mm hat bei (jeder) Resonanz Mode # mit Frequenz x in Hz eine Impedanzmagnitude y in Mohm.

Den selben Magnitudenwert y hat ein (~jeder) Mode in einem aufgeweiteten Rohr, mit Durchmesser 11,0mm $q_0=1,1$ und einer Länge von 0,8264 m = $RL * 0,8264$ (kürzer) = $1/q_0^2$ bei Frequenzen, die dann um den Faktor $1,0 * 1,21$ = $x * q_0^2$ größer (höher) sind.

Den selben Magnitudenwert y hat auch ein (~jeder) Mode in einem invers engeren Rohr, mit Durchmesser 9,09mm = $1/q_0$ und einer Länge von 1,21 m = $RL * 1,21$ (länger) = q_0^2 bei Frequenzen, die dann um den Faktor $1,0 / 1,21$ = $x * 0,8264$ geringer (tiefer) sind.

Der notwendige Rohrlängenfaktor bzw. $1/\text{Frequenzfaktor}$ = Querschnitt-Flächenfaktor q_0^2
 Der notwendige Durchmesserfaktor q_0 bei geänderter Rohrlänge = Frequenz = $\sqrt{1/q_0^2}$

= Durchmesser * q_0 und Rohrlänge / q_0^2 = Mode# mit selber Magnitude

Das bedeutet am Beispiel von (Ventil)-Blasinstrumenten, bei denen die Grundstimmung durch zuschalten (oder ev. wegschalten) von ~ zylindrischen Rohrlängen variabel ist bzw. geändert wird:

Alle Mode# sollen z.B. vertieft werden,

- > größere Rohrlänge = tiefere Resonanzfrequenzen,
- > gleicher Querschnitt = geringere Magnitude (bei gleicher Frequenz = höherer Mode#).

Wollte man diese Input Magnituden Verluste aufgrund der Rohrverlängerung kompensieren, müsste das mit einer gleichzeitigen Boresize Reduktion über der gesamten Rohrlänge erfolgen.

Das wäre theoretisch nur mit einem „flexiblen Schlauch“ möglich, der sich bei Dehnung exakt im richtigen Verhältnis zusammenziehen müsste, also nicht sehr aussichtsreich, es bliebe noch als Alternative für jede Rohrlänge ein eigenes Rohr mit dafür passendem oder anderen gewollten Querschnitt zu verwenden (siehe dazu z.B. Teil 1 Basics, Weitenmensur von Orgelpfeifen).

Übersicht Input Impedanz Magnituden typischer zylindrischer Rohrquerschnitte

Der eigentliche Zin Magnitudenwert hängt stark vom Radiation Modell und weiteren Faktoren ab. Dieser kann z.B. über die Kettentransfer Matrix Methode ermittelt werden. Der exakte Zahlenwert ist aber (bei Blechblasinstrumenten) in der Praxis nicht wirklich von großer Bedeutung, die Größenordnung selbst hingegen je nach Instrumententyp, Lage und Stimmung aber schon.

Closed-open Zylinder (23 Grad Celsius, 30% Luftfeuchte, Loss-Faktor 1,0, Plane Wave)
mit Dichte Luft 1,196 kg/m³ und Schallausbreitungsgeschwindigkeit 344 m/Sek. $c^* \rho = 411,39 \text{ Hz}$
bei ~23 Grad C:

| Länge | Diameter | Resonanz Peak #1 Hz | Zin Magn. Mohm | char. Zc Mohm | Q1-Faktor Peak #1 |
|--|----------|------------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| 1000mm | 5 mm | 80,19 | 200 | 20,9 | 9,57 |
| 1000mm | 7,071mm | 81,8 | 139,4 | 10,48 | 13,30 |
| 1000mm | 8mm | 82,3 | 122,8 | 8,18 | 15,01 |
| 1000mm | 9mm | 82,7 | 108,8 | 6,47 | 16,82 |
| 1000mm | 10mm | 83 | 97,77 | 5,238 | 18,67 |
| 1000mm | 11mm | 83,23 | 88,66 | 4,33 | 20,48 |
| 1000mm | 11,5mm | 83,33 | 84,73 | 3,96 | 21,40 |
| 1000mm | 11,7mm | 83,37 | 83,25 | 3,826 | 21,76 |
| 1000mm | 12,0mm | 83,42 | 81,13 | 3,64 | 22,29 |
| 1000mm | 13,0mm | 83,57 | 74,76 | 3,1 | 24,12 |
| 1000mm | 14,0mm | 83,7 | 69,32 | 2,67 | 25,96 |
| 1000mm | 20,0mm | 84,17 | 48,14 | 1,309 | 36,78 |
| Bei doppeltem Durchmesser = 4facher Querschnittfläche fällt die Peak Magnitude auf 0,5 Pot, die charakteristische Impedanz Zc fällt auf ¼, q1 Faktor verdoppelt sich dadurch. Umso höher Zc, desto höher muß die reflektierte Druckwelle ausfallen, höhere Input Magnitude | | | | | |
| Aus der Zin Peak Max. (Hüllkurve) kann die char. Impedanz Zc und Zmin ermittelt werden: Mit q0 =Durchmesserfaktor gegen 10mm Durchmesser: $Z_c = [100 / (Z_{max} * q_0^2)]^2$ Q1 Magnitudenfaktor Faktor = Z_{max} / Z_c $Z_c = Z_{max} / Q_1$ $Z_{min} = Z_{max} / Q_1^2$ Z_{max} Diff.-Faktor = $1/q_0^4$ Z_c Diff.-Faktor = $1/q_0^2$ Z_{min} Diff.-Faktor = $1/q_0^5$ | | | | | |
| 1400mm | 11mm | 59,17 | 75,25 | 4,33 | 17,38 |
| 1500mm | 11mm | 55,16 | 72,76 | 4,33 | 16,80 |
| 2000mm | 11mm | 41,15 | 63,25 | 4,33 | 14,61 |
| Verdoppelung Rohrlänge = halbe Frequenz mit 0,7071 facher Magnitude, $Q_1 = /1,4142$ 4fache Rohrlänge = ¼ Frequenz mit halber Magnitude, Zc = bleibt $Q_1 = /2,0$ | | | | | |
| 500mm | 11mm | 167,3 | 124,08 | 4,33 | 28,66 |
| Halbierung Rohrlänge = ~doppelte Frequenz mit ~1,4142 facher Magnitude, $Q_1 = *1,4142$ ¼ Rohrlänge = 4fache Frequenz mit doppelter Magnitude, Zc=bleibt $Q_1 = *2,0$ | | | | | |

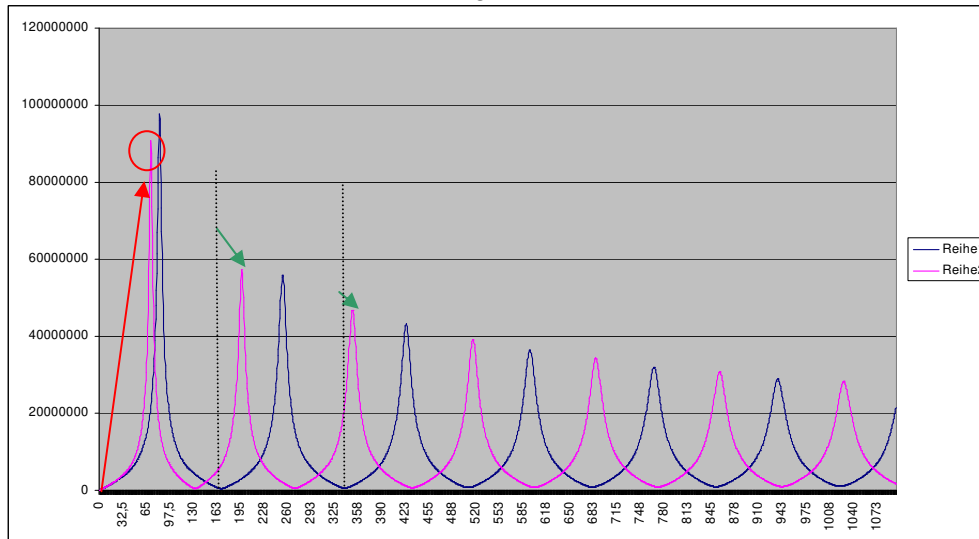
Geomittel aus 2000 u. 500mm =1000mm->Geomittel aus 63,25 und 124,08 =88,66 Mohm.

Pitch – hat beinahe kein Potential, steigt mit Durchmessererweiterung leicht an, trotz dann größerer Endkorrektor ergeben sich durch größeren Querschnitt weniger Wandreibungsverluste!

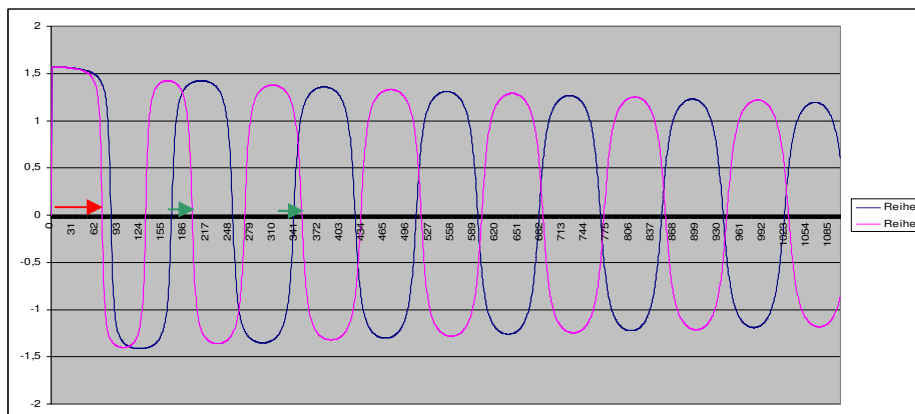
Double-Closed Zylinder, Unterschiede und Auswirkung von Undichtheiten:

Bei einem beidseits geschlossenen Zylinder wären Resonanzfrequenzen dort, wo bei closed-open Zylinder Antiresonanzen liegen, d.h. bei geradzahlig 1/Vielfachen einer $\frac{1}{4}$ Wellenlänge. Der Phasenwinkel ist +180 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Die Magnitudenwerte (Hüllkurven) bleiben dabei ident dem closed-open Zylinder, wenn Abstrahlverluste nicht berücksichtigt werden.

Randnotiz: Ist hier aber nur ein winzigstes Loch am Ende, so wird ein „extra Mode „0“ in der Nähe Mode #1 im closed-open Zylinder „eingeschoben“; die nächst höheren Modes werden ebenfalls noch stark erhöht, Phasenwinkel zeigen ein sehr interessantes Verhalten:



x= Frequenz in Hz, y= >Zin akustisch Ohm; unten: Winkeldifferenz Druck/Fluss in Radiant



blau: closed-open Zylinder, Länge 1m, Dia 10mm, Loss Faktor 1,0

rosa: closed-closed Zylinder mit einem minimalem Loch 0,001mm am Rohrende

grün: Pfeile: Mode #1 und Mode#2 in der Frequenz erhöht, Magnitude dadurch geringer.

In diesem Extremfall haben **alle** Resonanzmodes das Loch an einem ihrer Druckbäuche.

Man sieht was man bereits wußte: Tiefe Frequenzen sind bei Undichtheiten an Druckbäuchen sehr viel stärker verändert! Mode #1 wäre bei ~ 171 Hz, Mode #2 bei ~ 342 Hz, **den „eingeschobenen Mode „0“ bei ~70 Hz gäbe es gar nicht.** Umso größer die Anzahl restlicher Druckbäuche im Rohr vorhanden sind, desto geringer sind die Auswirkungen einer Undichtheit bzw. eines Loches.

Denken wir an das (am Beginn) „geschlossene“ Ende, so kann man erahnen, daß bei einem Blasinstrument die Bläserlippen oder Rohrblätter und deren physische Unterschiede einen nicht unwesentlichen Einfluss auf ein finales Gesamtergebnis haben müssen!

Teil 2: Zylindrische Rohre, Mensur und Resonanzfrequenzen

Globale Änderung der Resonanzfrequenzen bei Boresize Änderung

Effekt Endkorrektur theoretisch nach Levine/Schwinger, unflanged Baffle;
Ein größerer Querschnitt sollte ein ideales Rohr „akustisch wirksam“ pro offenem Ende verlängern: $0,30665 \cdot \text{Durchmesser}$ nach Levine/Schwinger, \rightarrow Radiation Impedanz.

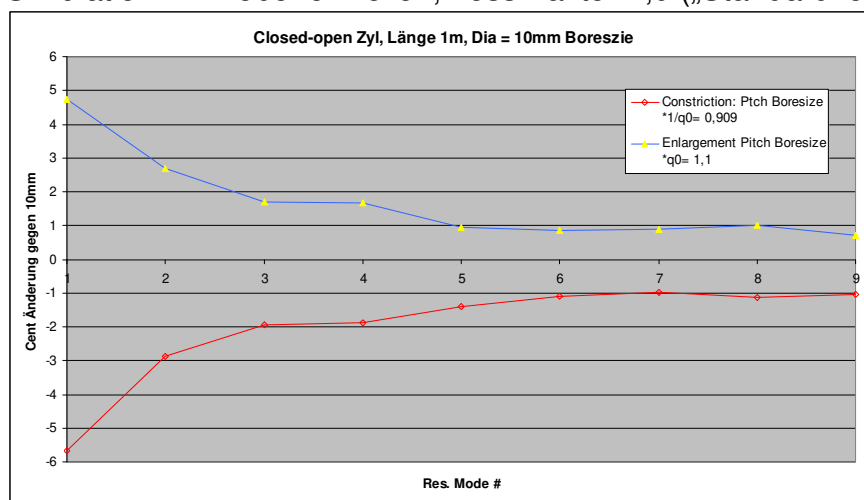
Dia 10mm: RL 1m+ Endkorr. $10\text{mm} \cdot 0,30665 = 3,066\text{mm} = 1,00306\text{ m}$

Dia 11mm: RL 1m+ Endkorr. $11\text{mm} \cdot 0,30665 = 3,373\text{mm} = 1,00337\text{ m} = +0,306\text{ mm}$

d.h. = Längenfaktor $1,000305$ = $0,99969\text{ FF}$ = $-0,53\text{ Cent}$

sollten die Frequenzen bei RL 1m und Querschnittserweiterung von 21% Fläche $q_0^2 = 1,21$ anhand dieses Effektes niedriger ausfallen:

Simulation ART ebene Wellen, Loss Faktor 1,0 („Standardverluste“) + Radiation Losses:



Boresize Change, max. Änderung Resonanzfrequenzen odd gegen even beachten!

Ab ~ Mode #5 beträgt die Änderung effektiv aber rund = $-0,5\text{ Cent Endkorr} + 1,4\text{ Cent}$ anhand geringerer Verluste = $+0,9\text{ Cent}$ höhere Frequenzen bei Boresize Erweiterung.

Bei Boresize Einengung = geringere Endkorrektur = $+0,5\text{ Cent Endkorr.}$ - ~ $1,6\text{ Cent}$ anhand höherer Verluste = $\sim -1,1\text{ Cent}$ geringere Frequenzen bei Boresize Einengung.

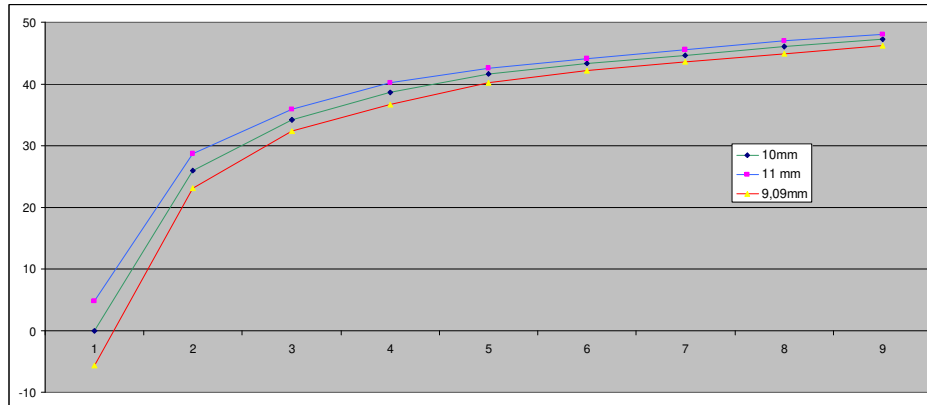
Gleiche +/- Centwerte würden invers proportionale Änderung bedeuten, bei Mode #1 sieht man am deutlichsten, daß Verluste invers überproportional steigen umso geringer der Rohrquerschnitt ist: $+4,7\text{ Cent}$ gegenüber $-5,8\text{ Cent}$ bei Einengung.

Bei Input Magnituden wurde argumentiert, die Magnitudenänderung entspricht $1/\sqrt{q_0^2}$ Querschnittfläche und durch Verluste fallen die Peakmaxima um $1/\sqrt{\text{Frequenzfaktor}}$.

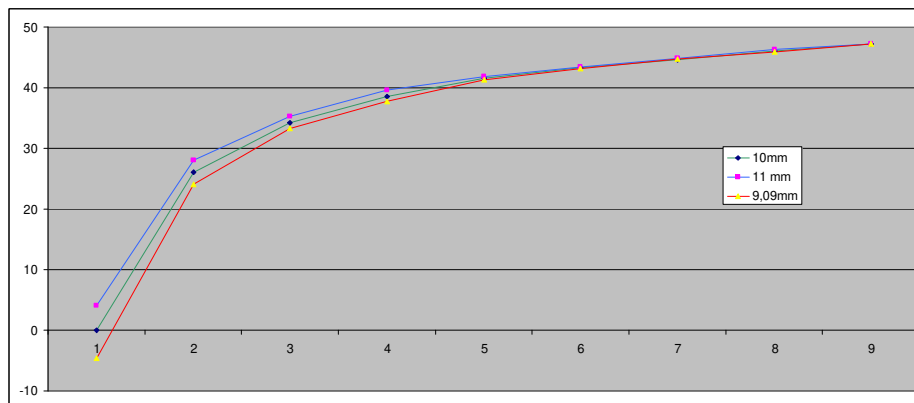
Zudem lässt sich einer char. Frequenz gleich Dichte * Geschwindigkeit ein definierter Magnituden Z Peak Wert anhand der querschnittabhängigen charakt. Impedanz Z_c zuordnen. Umso höher die Mode #, umso geringer die Magnitude durch „Verluste“.

Setzt man höhere Verluste auch fallenden Resonanzfrequenzen gleich, so wirken Verluste wesentlich stärker auf große Wellenlängen=kleine Frequ. bei Einengung=mehr Verlusten:
 kleine Mode#: Z Peak Frequenz stärker vertieft + Magnitude stärker erhöht
 große Mode#: Z Peak Frequenz vertieft + Magnitude erhöht

Man beobachtet durch die Kombination aus Verlusten und „Endkorrektur“ eine systematische Inharmonizität beim closed-open Zylinder, höhere Modes sind nicht mehr strikt ungeradzahlig Vielfache einer Grundfrequenz, ebenso weichen sie auch untereinander ab. Eine gemeinsame Grundstimmung hier zu definieren müsste auf einen dezidierte Referenz abstellen, üblicherweise wird dann der Grundton verwendet: Mode #1.



„Grundstimmung“ steigt mit Boresize Enlargement, Mode 9: +47,4 Cent zu Mode #1



Inharmonizität - steigt mit Boresize Constriction, (normiert auf Mode #9) $(n9^2)-1=17,0$ anstelle Frequenzfaktor Mode #1* 17,0 ergibt sich bei Mode #9: $1^* \sim 17,43-17,53$

Ein „langer und enger“ closed-open Zylinder hat also mit Berücksichtigung von Verlusten ein abgeschwächt ähnliches Verhalten eines Frustum closed-open (Konus mit fehlender Spitze) auf Inharmonizität bezogen. Die Grundstimmung ist daher stark von Mode #1 aufwärts geringer werdend abhängig.

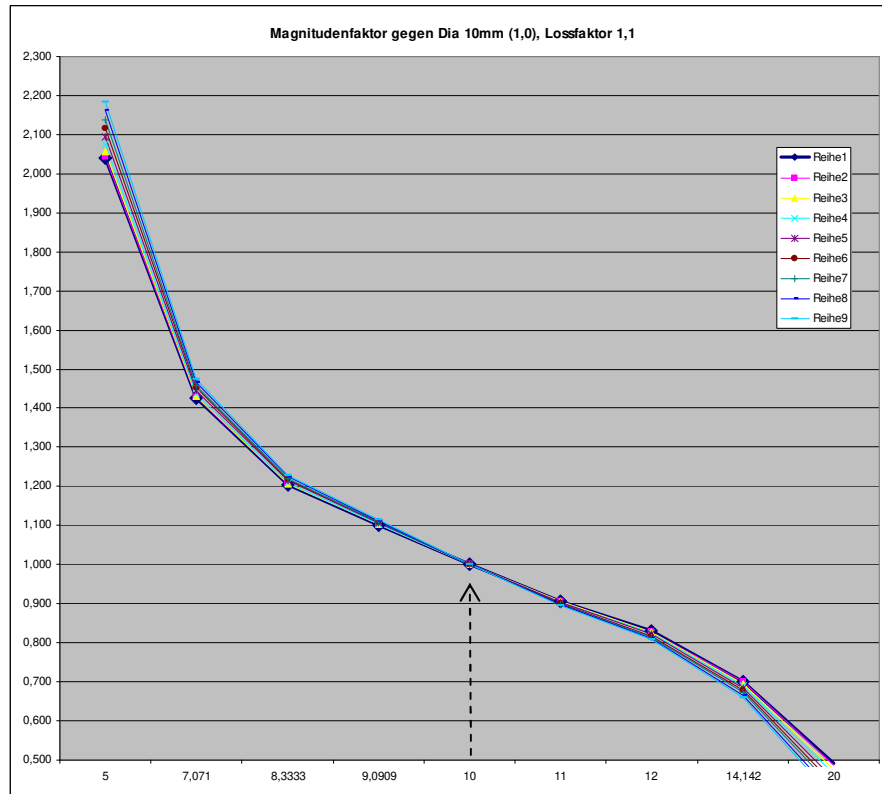
Verluste (Modellierung siehe Sideletter #2) insgesamt bestehen aus:

- + viskothermalen Verlusten innerhalb (aufgrund) des Mediums (Luft) selbst
- + wandnahen laminaren Reibungsverlusten (Wärmeumwandlung) = Lossfaktor > 1,0 (dadurch aber auch in einem längerem Rohr größer)
- + Abstrahlungsverlusten Z_c/Z_L = geringere Max. Z_{in} , höhere Minima Z_{in} ; (nur wenn der Querschnitt geändert wäre)

Um die Auswirkungen zu erkunden habe ich wieder einmal einen Versuch gestartet:

ART Simulation Zylinder closed-open mit 1m phys. Rohrlänge, Temp. 23 Grad Celsius, Modell ebene Wellen, Loss-Faktor wandnahe Verluste = 1,1 und unterschiedlichen Durchmessern.

Ich beginne mit Magnituden Änderungen Zin Peak; diese sind plausibel:



$x = q_0 \cdot 10 = \text{Dia in mm}$, $y = q_1 \text{ Magnitudenfaktor} \sim 1/q_0 \text{ Querschnittsfaktor}$. Reihe # = Res. Mode #
 Änderung Faktor Peak Magnituden q_1 ist \sim invers proportional zu $q_0 = \text{Durchmesserfaktor}$
 Rohrlänge = 1000mm; Magnituden-Faktor 1,0 = $RL \text{ 1000 mm} / \text{Dia 10 mm} = 100$

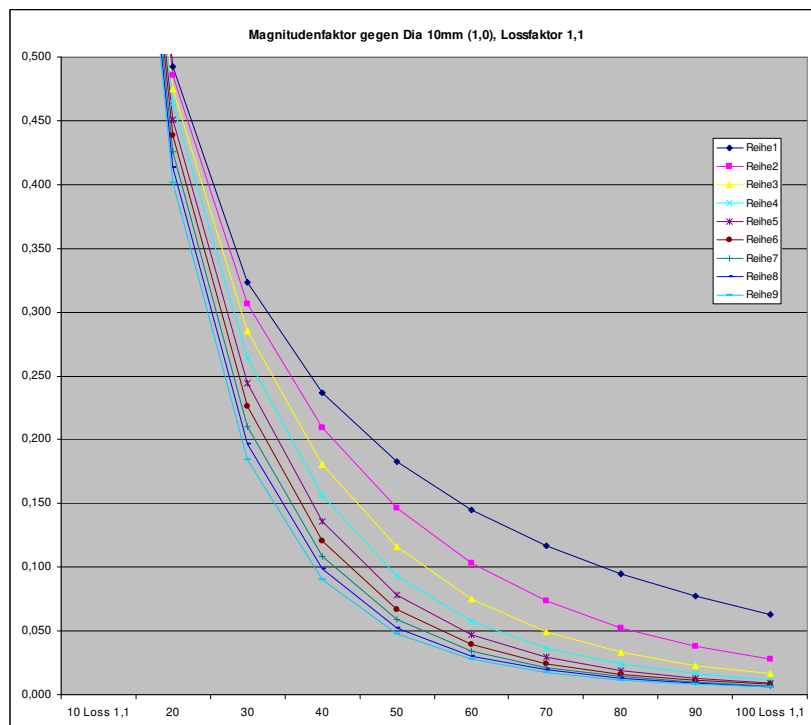
In einem überschaubaren Bereich und darüber

verhalten sich Zin Peak Magnituden \sim invers proportional zu Querschnittsfaktoren: $1/q_0$.

$\sim 2\text{-fache}$ Magnitude aller Modes bei halbem Durchmesser = $1/q_0$;

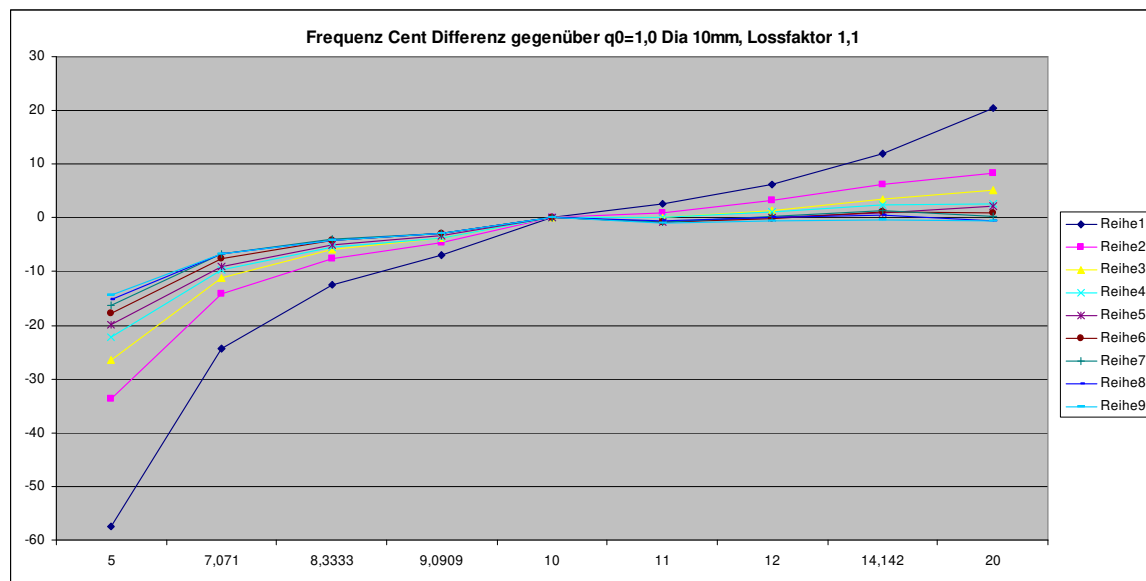
$\sim 1/2$ Magnitude aller Modes bei doppeltem Durchmesser = $1 \cdot q_0$

... höhere Modes werden beidseits stärker verändert und haben dann schon größere Abweichungen dazu.

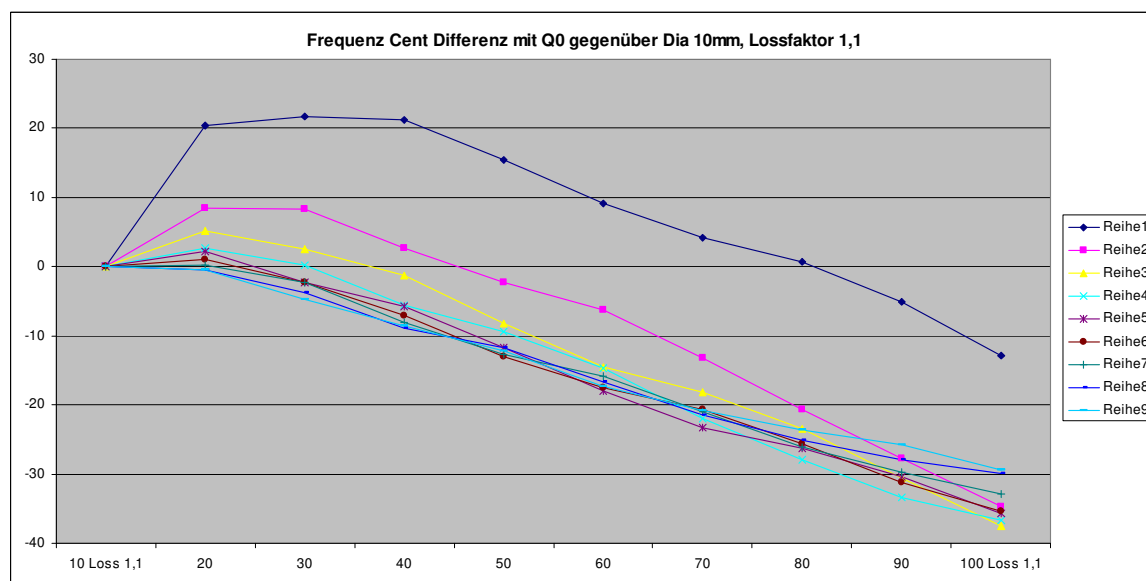


Mode #1 bei 3fachem Durchmesser noch annähernd prop.: $\sim 1/3$ Magnitude Z_{max} . bei $RL/\text{Dia} = 33,3$
 Höhere Modes weichen bereits bei 1,41 fachem Durchmesser $= 2 \times \text{Fläche}$ merklich bis zu $\sim 5\%$ ab.

Frequenzänderungen closed-open Zylinder, 1m Länge gegenüber 10mm Durchmesser:



Die Frequenz nimmt bei halber Fläche $q_0=0,7071$ Mode #1 um 24 Cent ab, Mode #2 ~14 Cent ab (Reihe=Mode#) bei 2facher Fläche $q_0=1,4142$ um „nur“ 12 Cent zu; Mode #2 ~ 7 Cent zu



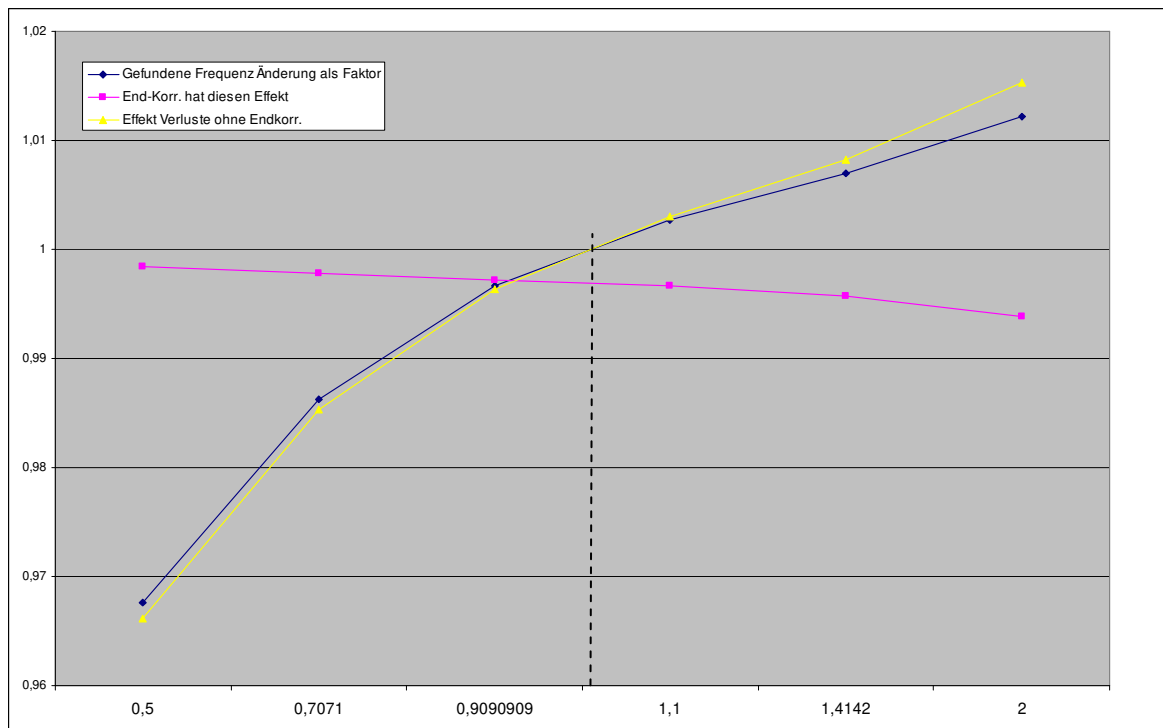
Hier der Vergleich mit den weiten Rohren. Man kann feststellen, daß ab einem Verhältnis von Rohrlänge/Durchmesser $1000/30 \text{ mm}$ Rohrlänge $\approx 33,3$ (hier $q_0^2=9$) es einen Wendepunkt gibt, ab dem die Frequenz von Mode #1 mit zunehmenden Durchmesser beginnt tiefer zu werden. Höhere Modes haben diesen Wendepunkt bereits ~ beim Verhältnis 100, also der genannten Referenz. Bei einem Durchmesser 80mm hätte Mode #1 die selbe Frequenz wie das 10mm Rohr!

Das bedeutet Effekte durch Verluste überwiegen bei engen Messuren extrem stark, die „Endkorrektur“ pro offenem Ende wie in der Literatur angegeben hat erst ab einem Verhältnis $<33,3$ einen Effekt der sich in Summe vertiefend auf die Frequenz auswirkt.

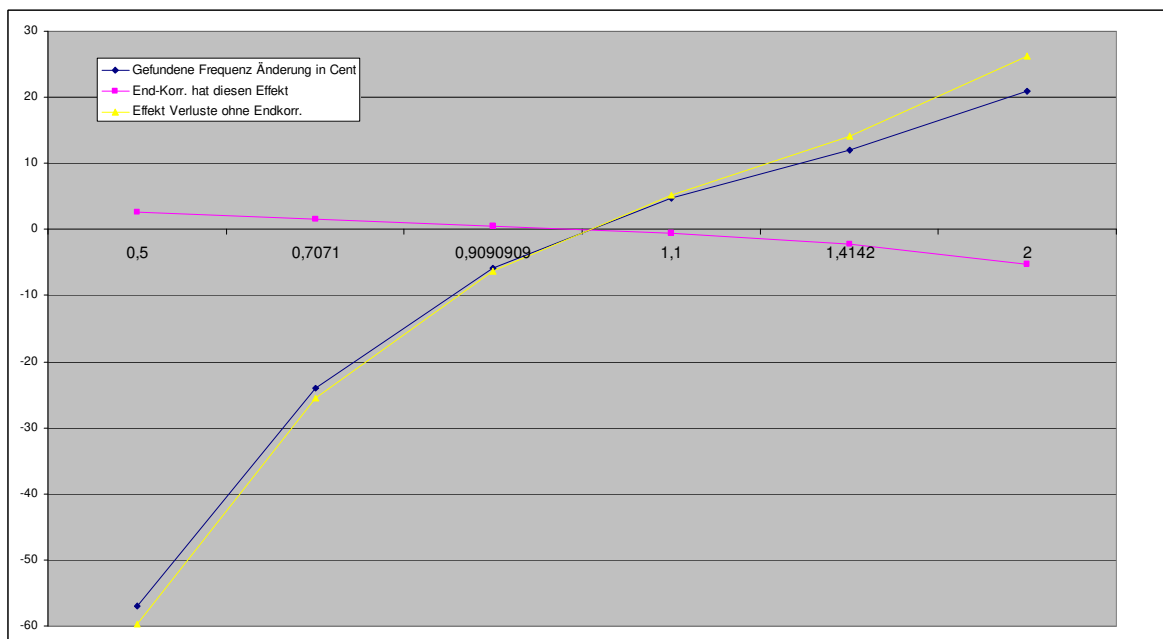
Mit verschiedenen Durchmessern *wäre* mit einem Endkorrekturfaktor $0,3 \cdot \text{Durchmesser}$:
 10mm: Endkorr $=10 \cdot 0,3 = 3\text{mm}$ LF: 1,003 FF $=0,997 = -5,3 \text{ Cent}$ Effekt = 0C gegen 10
 30mm: Endkorr $=30 \cdot 0,3 = 9\text{mm}$ LF: 1,009 FF $=0,991 = -15,8 \text{ Cent}$ Effekt = -10,5C –,-
 80mm: Endkorr $=80 \cdot 0,3 = 24\text{mm}$ LF: 1,024 FF $=0,976 = -41,95 \text{ Cent}$ Effekt = -36,6C –,-

d.h. die Frequenz von Mode #1 anhand der Endkorrektur ohne Verluste mit Dia 30mm müsste 26,1 Cent höher sein als Dia 80mm -> es kommen ~ 20 Cent heraus
Dia 10mm müsste 36,6 Cent höher sein als Dia 80mm -> es kommen ~ 0 Cent heraus,

Die Vertiefung durch Verluste im engeren Rohr beträgt daher in diesem Fall 36,6 Cent, entspricht einem Frequ. Faktor = 0,979 bzw. einem Längenfaktor = 1,021 bei selbem Resonanzmode #1, aber 8 mal kleinerem Durchmesser, also erstaunlich wenig gegenüber den Magnituden Peaks, die bei 80mm Durchmesser auf unter 1/10 gegen 10mm fallen.

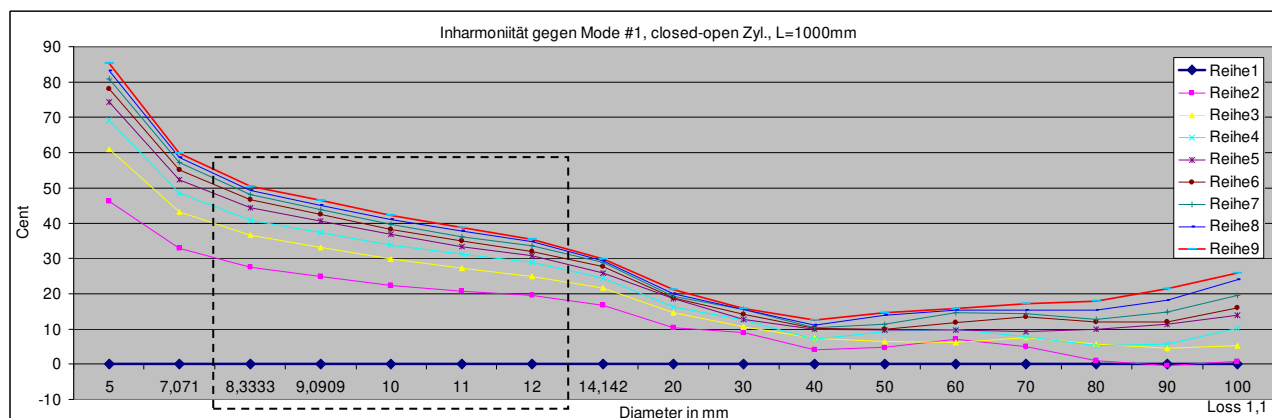


Mode #1, Rohrlänge 1m mit Dia 10mm und abgeänderten Durchmesserfaktoren = q0



Mode #1, Rohrlänge 1m mit Dia 10mm und abgeänderten Durchmesserfaktoren = q0
gleiche Cent Werte +/- wären invers proportionale Effekte aus Querschnittänderung.

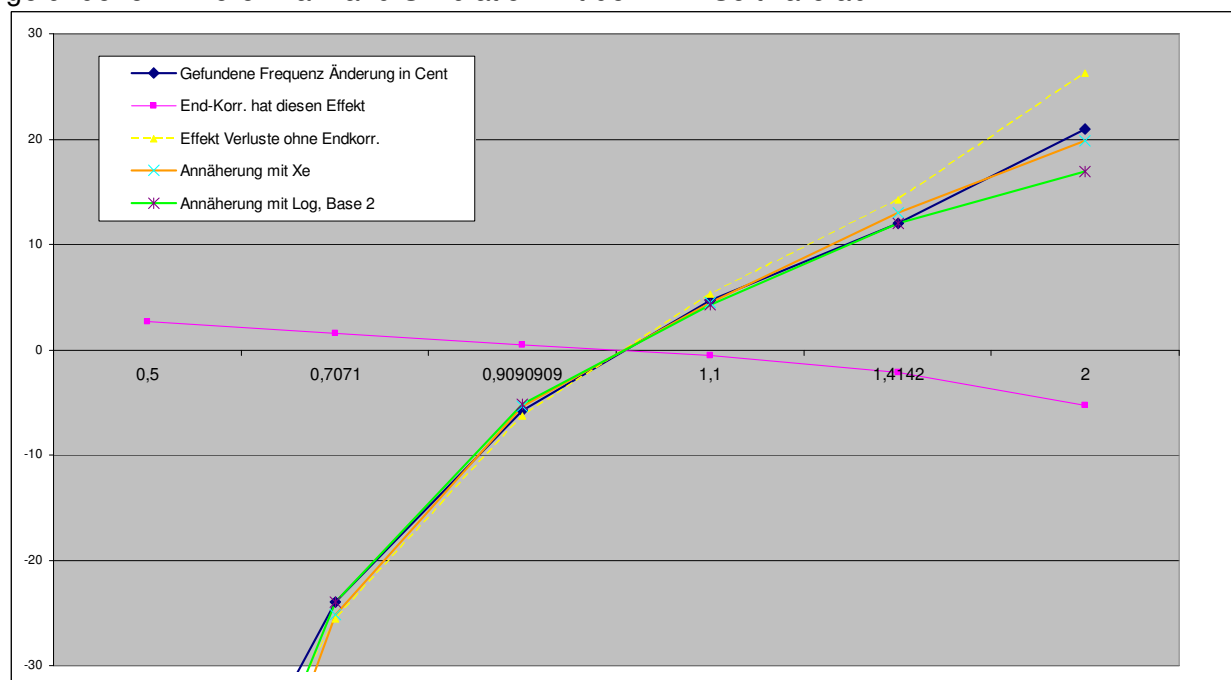
Harmonizität von closed-open Zylindern, Querschnitt- bzw. Mensurabhängigkeit:



Reihe# = Mode #, Die Grundstimmung Mode #1 fällt und die Inharmonizität steigt mit geringerem Querschnitt, bzw. steigt die Harmonizität mit höherem Querschnitt, bis an eine Schwelle, wo diese wieder für einen breiten Bereich beinahe unverändert bleibt. Mit Durchmesser 40mm bei Rohrlänge 1000mm scheint das mögliche Maximum an Harmonizität ~12,5 Cent erreicht zu werden. Das entspricht auch annähernd in etwa der höchst möglichen Grundstimmung (Mode #1). Wohlgermerkt liefert hier ein Maximum an Harmonizität nur die ungeradzahlig Vielfachen der Grundfrequenz, geradzahlig Vielfache liegen an Antiresonanzen.

Änderung Grundstimmung (Mode #1) mit Boresizeänderung

Es gibt wie man aus den Grafiken erkennen kann kein universelles Rezept für jeden Querschnitt. Ich habe nach langem Experimentieren 2 Näherungsformeln gefunden, mit denen die Frequenzänderung gegenüber einem Rohr mit 10mm Durchmesser und Länge 1000m anhand der Querschnittfläche ermittelt werden kann. Diese weichen im (markierten) begrenzenden Bereich halber Querschnittfläche bis doppelter Querschnittfläche um nur maximal 1,2 Cent gegenüber der gefundenen Differenz anhand Simulation mit der ART Software ab:



$x = q_0$ = Durchmesserfaktor zu 10mm, closed-open Zylinder mit Länge 1000mm bei 23°C

y = Differenz in musikalischen Cent = logarithmische Werte ergeben:

Doppelter Frequenz Abfall bei Halbierung der Querschnittfläche, halber Anstieg bei Verdoppelung der Querschnittfläche im beschriebenen Durchmesserbereich und 1m Rohrlänge durch Verluste.

Näherung Variante 1 anhand Log mit Basis 2 (Grafik grün):

Bei q_0^2 gleich 2 muss $q_0^{\sqrt{2}}$ der Exponent sein: $q_0 1,4142^{\sqrt{2}}=2,00$ $\log_2(2,00)= +1,0/100$
 Bei q_0^2 gleich $\frac{1}{2}$ muss $q_0^{\sqrt{4}}$ der Exponent sein: $q_0 0,7071^{\sqrt{4}}=0,25$ $\log_2(0,25)= -2,0/100$

Das Geometrische Mittel aus 2 und $\frac{1}{2}$ = 2,8284.... das ist aber auch = $\sqrt{2} \cdot 2$.
 2,8284 * 1,4142 ergibt = 4 und 2,8284 / 1,4142 ergibt 2.

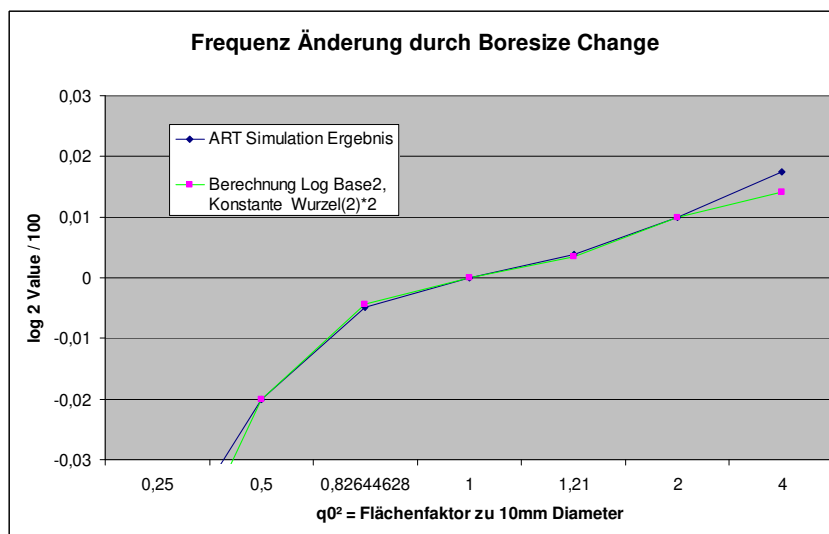
$2,8284 / \sqrt{q_0^2}$ = Exponent. Da $\sqrt{q_0^2}$ aber gleich q_0 ist, ergibt sich:
 $\sqrt{2} \cdot 2 / q_0$ = Exponent für die logarithmische Differenz; q_0 =Durchmesserfaktor

$\log(q_0^{\text{Exponent}}; \text{Basis2}) \cdot 100$ = die gesuchte logarithmische Frequenz-Differenz.

$2^{\log. \text{Frequ. Differenz}}$ ergibt den Frequenzfaktor und $\log(\text{Frequenzfaktor}; 2) \cdot 1200$
 als Näherung die zu erwartende Frequenz Änderung in der logarithmischen Einheit Cent!

Hier stimmen die Grenzwerte exakt überein (-24 Cent bei $q_0^2/2$ bzw. +12 Cent bei $q_0^2 \cdot 2$)
 Kleinere Flächenänderungen sind leider unterbewertet ($q_0=1,1$ rund 10% der Centwerte)

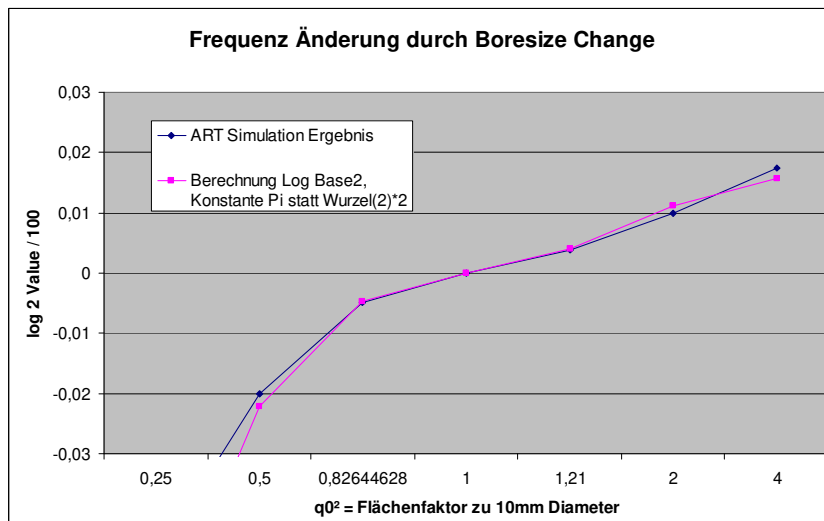
Ändert man die Konstante $\sqrt{2} \cdot 2$ (2,8284) auf π (3,14) ab, so werden kleinere Querschnittänderungen mit +/-10% Durchmesser ($q_0=1,1$) exakt getroffen, Fehler an den Extremwerten $q_0^2=0,5$ sind dann -2,6 Cent bzw. $q_0^2= 2,0$ +1,3 Cent (zu stark geändert).



Variante 1
 mit Konstante $\sqrt{2} \cdot 2$

liefert die exakten Werte bei
 Halbierung und Verdoppelung des
 Querschnittflächenfaktors q_0^2 ,

die Konstante ist mathematisch
 schlüssig, kleine Änderungen sind
 aber unterbewertet.



Variante 1 mit Konstante π
 anstelle $\sqrt{2} \cdot 2$

verbessert die Annäherung
 bei kleinen Querschnittänderungen

Näherung Variante 2 anhand Xe (Grafik orange):

Es werden eine Konstante und einige Variablen definiert:

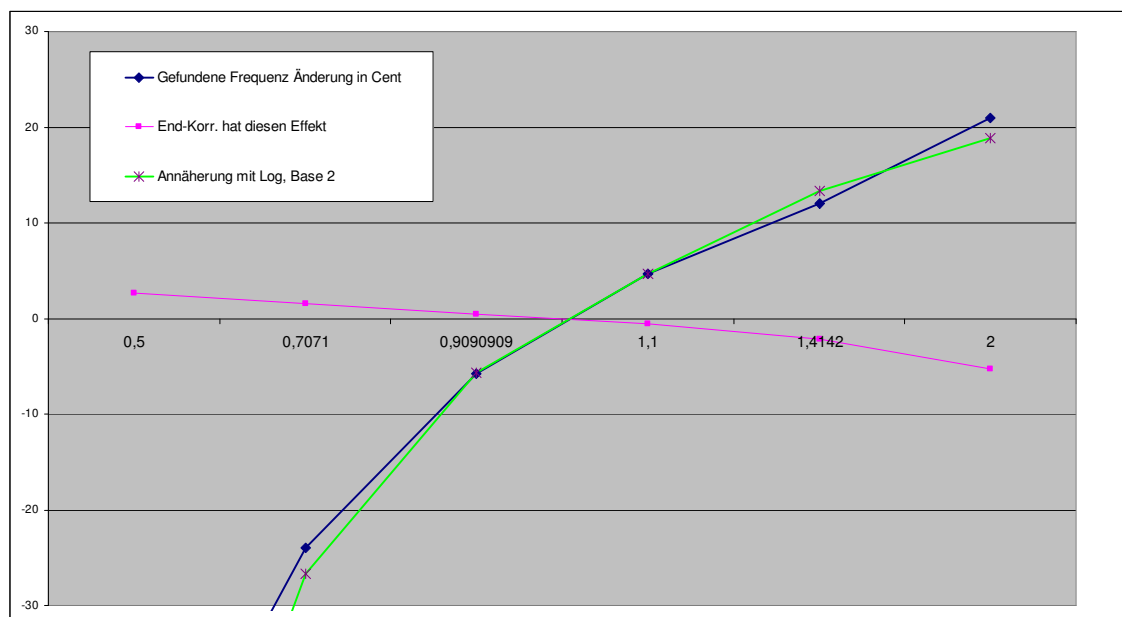
Konstante = $\sim 27-30$ ** ein Umrechnungsfaktor (empirisch ermittelt)
 $X_e = q_0^2 - 1$ Flächenfaktor – Differenz (bei $q_0 < 1,0$ ist X_e negativ)
 Faktor = $1/(1+X_e)$ ergibt Faktor 4 für $q_0^2=0,5$ und Faktor 0,5 für $q_0^2=2$

Konstante * X_e * Faktor = \sim ein vorab zu starker Centwert ohne Endkorrektur
 ... liefert Zahlenwerte, die stärker als die gesuchten logarithmischen Centwerte sind.
 Nun kann allerdings die Endkorrektur noch addiert werden, allerdings mit dem Faktor $1/(1+X_e)$ multipliziert, als Differenzwert in Cent gegenüber der Endkorrektur mit Durchmesser 10mm (die bei -5,3 Cent liegt).

Es ergibt sich daraus näherungsweise die zu erwartende Frequenzänderung in Cent:
 = (Konstante * X_e * Faktor) + (Endkorr. Centdifferenz gegen $q_0=1$ * Faktor)

Frequenzänderung Mode #1 in Cent $\sim [(X_e * \text{Konstante}) + \text{Diff. Endkorr.}] * [1/(1+X_e)]$

** mit Umrechnungsfaktor 27 würden die beiden Extremstellen im Bereich besser erraten, mit Faktor 30 werden hingegen kleine Differenzen beinahe exakt „getroffen“, -5,7 Cent bei $q_0 = 0,9090$ +4,8 Cent bei $q_0 = 1,1000$ ist gleich der Simulationsergebnisse. größere Differenzen sind dann aber überbewertet :
 -27 Cent anstelle -24 Cent bei $q_0^2=0,5$ +14 Cent anstelle +12 Cent bei $q_0^2=2,0$



Variante 2 mit Konstante Wert 30 verbessert die Annäherung bei kleinen Querschnittänderungen

Vergleicht man aber nur sehr kleine Borsize Durchmesseränderungen mit $q_0 < \pm 10\%$, -5,8 Cent gegenüber +4,7 Cent (=Hunderstel Halbtöne)= Faktor 1,2345 und q_0^2 wäre hier 1,21 kann als Faustregel gelten: Die Grundstimmung vertieft sich log. mit Boresize-Reduktion \sim um den Faktor q_0^2 stärker, als sie sich mit Boresize-Erweiterung erhöhen würde. Es ergibt sich aus der Tatsache, daß Verluste hier ein Übergewicht zur Endkorrektur haben und die Rohre „lang“ sind.

Für 1m Rohrlänge, Referenz Durchmesser 10mm und Änderungen auf 11mm bzw. auf 9,09mm:
 $q_0=1,1$ $d+=1,1-1=0,1$ $d-=1-1,1=-0,1$ nicht inv. prop: $1-d+=0,9$ $1/(1-d+)=q_{cent}=1,111$ $q_{cent}^2=1,2345$
 $d_{Cent} = -5,8+4,7=-1,1$ $-5,8/4,7=1,2345$ q_{cent}^2 vertieft Constr. logarithm. stärker wenn $d+$ gering!

Pitch-Pot. Geomittel = 5,222 Cent / $q_{cent} 1,111 = +4,7\text{Cent}$ und $-5,222 * q_{cent} 1,111 = -5,8\text{Cent}$.

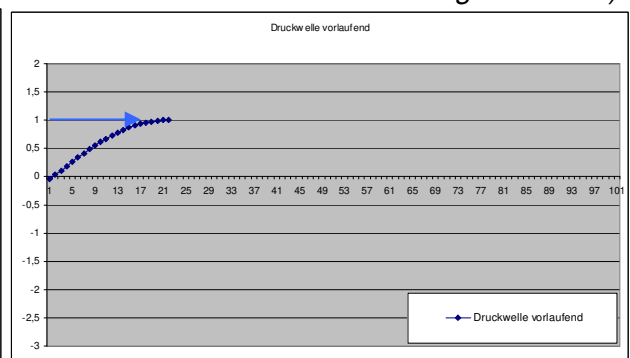
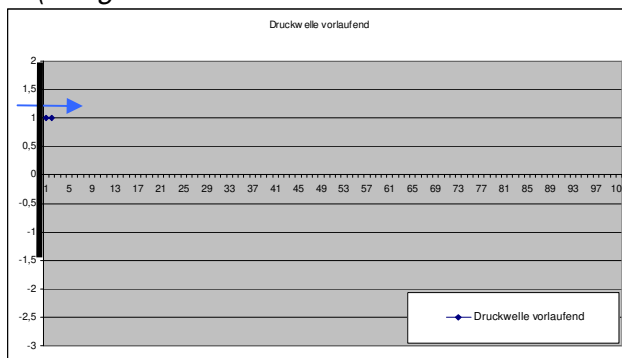
Closed-open Zylinder – Phasen = zeitliche Änderungen, Einschwingvorgang:

Erzwungener Impuls sowie erzwungene Schwingung (durch Bläser/Messkopf/Schlag, etc):

Beispiel: closed-open Zylinder, Länge 100cm, Mode 3 = ~429 Hz, Speed $c = \sim 344$ m/Sek.
 Periode = Dauer einer ganzen Schwingung = ~2,4ms (gerundet), Dauer $\frac{1}{4}$ Schwingung ~ 0,6ms.
 $\frac{1}{1}$ Wellenlänge ~ 80cm $\rightarrow \frac{1}{4}$ Wellenlänge = ~ 20cm, $\frac{5}{4}$ Schwingungen sind im Rohr.
 Minus Werte bedeuten Unterdruck gegenüber atmosphärischem Druck, Pluswerte Überdruck.

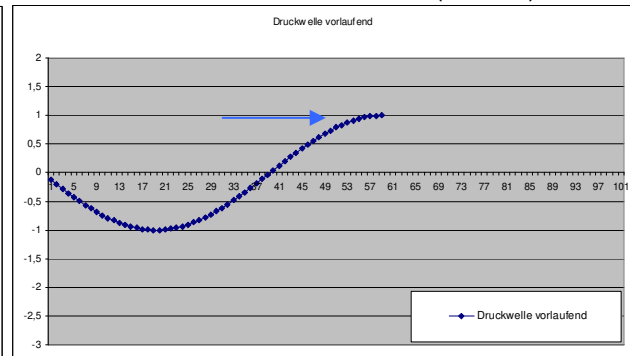
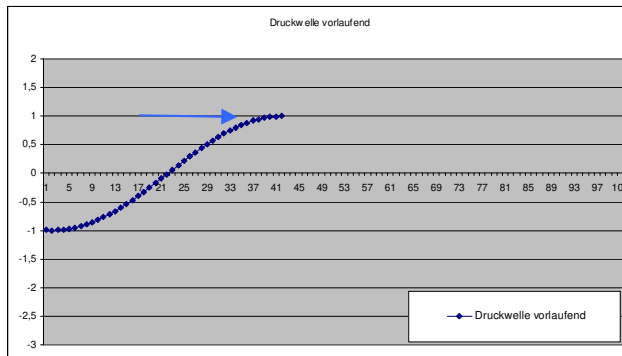
Der blaue bzw. rote „Schweif“ sollte beim ersten Überlesen völlig ignoriert werden. (nicht existent!)
 Der blaue bzw. rote „Schweif“ ist die zugrundeliegende Wellenfunktion: $A \cdot \cos(kx - \omega t)$ und deutet an, zu welcher Zeit weitere phasengleiche Pulse folgen müssten, damit sich später eine stehende Welle ausbilden könnte. Man beachte daher jeweils auch den Druckzustand am Eingang zur Zeit t .

- Ein **Überdruckimpuls** wandert vom geschlossenen Ende an das offene Ende **vorwärts**.
 (nach rückwärts kann er nicht.) **Er behält dabei ständig die Amplitude (+1) über der Zeit t bei.**
 (ich ignoriere zur leichteren Verständlichkeit und Übersicht den Druckabfall in langen Rohren)



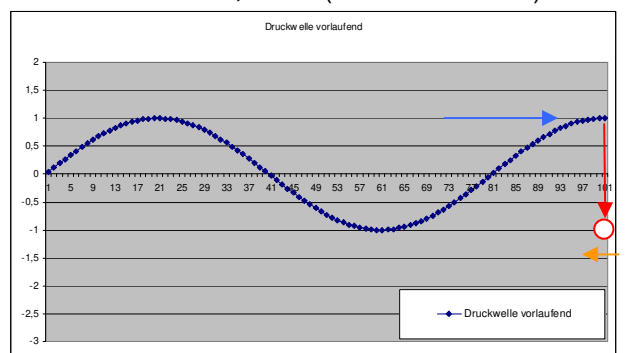
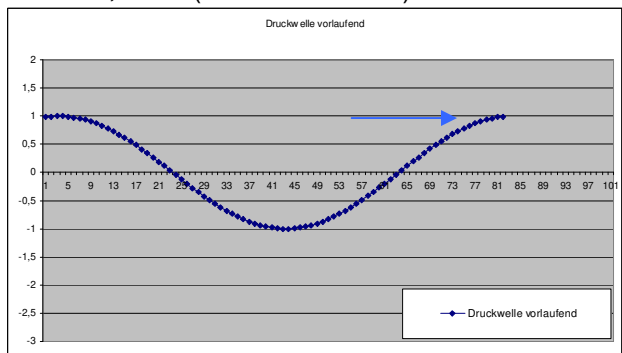
1. nach ~0,1ms

nach ~0,6ms = $\frac{1}{4}$ Periode, Strecke ($\frac{1}{4}$ WL) ~20cm



nach ~1,2ms ($\frac{2}{4}$ WL Strecke) $\frac{1}{2}$ Periode

nach ~1,8ms ($\frac{3}{4}$ WL Strecke)



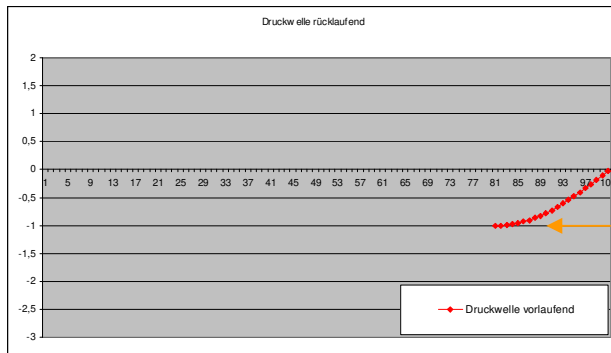
nach ~2,4ms nach 1 Periode/1Wellenlänge

nach ~3,0 ms = nach 1,25 Perioden bzw. WL

- am offenen Ende wird der Überdruckimpuls teilweise abgestrahlt, **größtenteils** aber **reflektiert**, und läuft **180° gedreht** ungebremst als **Unterdruckimpuls** zum geschlossenen Ende **zurück**:

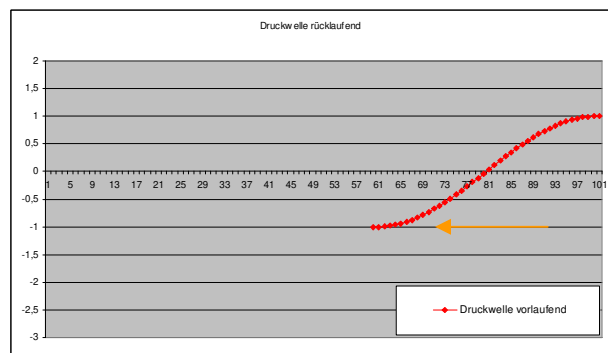
Das hat als Ursache Impedanz-Mismatch.

Ich gehe nach wie vor davon aus, daß nur dieser einzige „Druckstoß“ im Rohr vorhanden ist, beim Zurücklaufen ist er allerdings ein „Sog“ mit konstanter Amplitude -1 zur Zeit t .

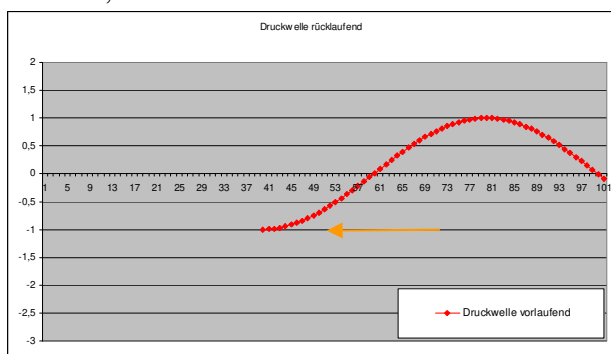


nach ~3,6ms

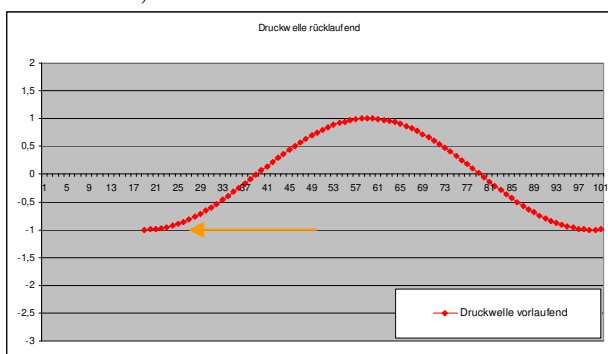
1 ½ Perioden



nach ~4,2ms

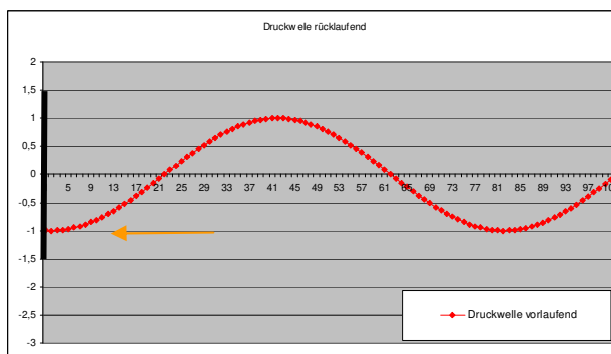


nach ~4,8ms (2 Perioden bzw. 2WL Strecke)

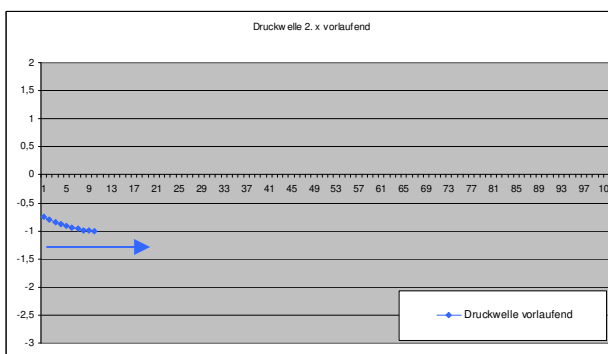


nach ~5,4ms

3. Am geschlossenen Ende angekommen muß er „abprallen“, seine Phasengeschwindigkeit wird vorübergehend 0, er wird wiederum **reflektiert**, allerdings **nicht gedreht**, **bleibt ein Unterdruckimpuls** und wandert wieder zum offenen Ende **vorwärts**, der 2. Roundtrip (Phase 3) hat begonnen:

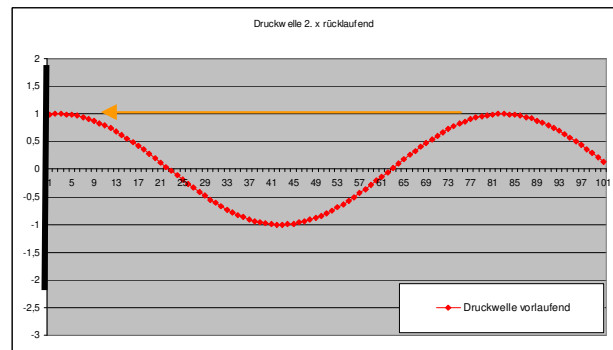
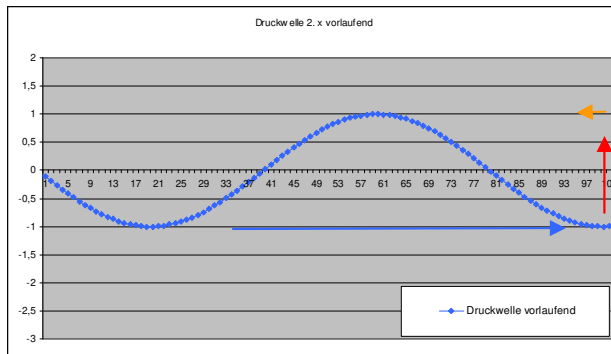


nach ~6ms=3Perioden ist der 1. „Roundtrip“ bewältigt *später, nach ~6,3ms (~ +1/8WL Strecke)*



In einem Input Impuls-Response Diagramm würde der Puls nun als 1. wahrnehmbarer und negativer Ausschlag = Unterdruck bei 6ms erscheinen und danach gleich wieder verschwinden.

4. erreicht hier zum 2. mal das offene Ende, wird **größtenteils** wieder **reflektiert** und wandert **180°gedreht** als **Überdruckimpuls** zum 2. mal an das geschlossene Ende **zurück**.



nach ~9ms Drehung +Reflektion am o. Ende nach ~12ms: =6 Perioden: 2. Roundtrip beendet.

Im Input Impuls-Diagramm wäre es ein 2. positiver Ausschlag =Überdruck bei 12ms.

5.=1. Der Impuls muß wieder „abprallen“, d.h. seine Geschwindigkeit wird durchgangsweise 0, er wird reflektiert aber nicht gedreht, wandert als **Überdruckimpuls** zum offenen Ende (Phase 1).

Letztlich wird der Impuls durch Reibung, Abstrahlung und mit jeder Reflektion stark bedämpft und klingt rasch aus. Er wird bei jedem Roundtrip daher auch breiter.

Möglicherweise irritieren die eingezeichneten Sinus- bzw. Cosinus-„Schwänze“ für Mode 3.

Das ist richtig, denn solange nur 1 einzelner Puls im Rohr unterwegs ist kommt keine Resonanz und auch keine Antiresonanz zustande. Nur wenn in einem passenden Zeitmoment phasengleiche zus. Druck- (u. Sog)-Pulse hinzugefügt würden, ergeben sich periodisch andauernd Schwingungen und Resonanz. Es kann aber dennoch aus der Impuls-Response nach Z im Frequenzbereich umgerechnet werden, üblicherweise ist das aber mit einer sehr schlechten Auflösung verbunden.

Es gibt also in einem closed-open Rohr 4 zeitlich ablaufende Zustände für einen einzelnen Puls:

- | | | | |
|----|----------------|----------|---|
| 1. | Überdruck --> | Drehung, | Richtungswechsel =Phase 1 |
| 2. | Unterdruck <-- | | Richtungswechsel, 1. Roundtrip beendet, 1n Perioden |
| 3. | Unterdruck --> | Drehung, | Richtungswechsel =Phase 3 |
| 4. | Überdruck <-- | | Richtungswechsel, 2. Roundtrip beendet, 2n Perioden |

Wäre das Rohr beidseits offen, gäbe es nur 2 zeitlich ablaufende Zustände:

- | | | | |
|----|----------------|----------|--|
| 1. | Überdruck --> | Drehung, | Richtungswechsel (1/2 Roundtrip...) |
| 2. | Unterdruck <-- | Drehung, | Richtungswechsel 1. Roundtrip beendet, 1n Perioden |

Nun kann man eventuell verstehen, warum in ein closed-open Rohr $\frac{1}{4}$ WL und ungeradzahlig Vielfache davon als Resonanzfrequenzen auftreten, während es im open-open Rohr $\frac{1}{2}$ Wellenlängen und alle Vielfachen davon sind.

Der Grundton (Mode1) des closed-open Rohres hat eine Frequenz, die 1 Oktave = 50% Frequenz tiefer liegt als die eines open-open Rohres, weil insgesamt 2 Roundtrips = doppelte Strecke dafür erforderlich sind um am Eingang einen phasengleichen Überdruckimpuls hinzufügen zu können. Beim beidseits offenen Rohr ist das bereits nach 1 Roundtrip möglich/notwendig.

Stehende Wellen können entstehen, was bedeutet, daß sich Druckknoten örtlich mit der Zeit nicht verschieben. Druckbäuche verschieben sich ebenfalls nicht auf der Längsachse, sie haben aber alternierend und pulsierend Überdruck oder Unterdruckmaxima. (Doppelt so oft als Frequenz).

Während der 2 Roundtrips 12ms (Zeit) bzw. nach 4m Wegstrecke hätte Mode #3:

5 ganze Schwingungen ausgeführt = 5 Wellenlängen Strecke = 5 Perioden Zeit überschritten; $(2n-1)$
 5 x hätte ein Druckpuls zeitlich passend zugeführt werden müssen, sowie 5 x ein Unterdruckpuls,
 d.h. 1 x pro Schwingung ein Druck- und $\frac{1}{2}$ Periode später ein Unterdruckpuls, alle 1,2ms

Druckbauchmaxima hätten sich jeweils nach einer $\frac{1}{2}$ Periode von Überdruck zu Unterdruck und vs
 ausgetauscht = 1,2ms (858 Hz), dh. doppelt so schnell als die Resonanzfrequenz mit ihrer Periode
 von 2,4ms bzw. 429 Hz. Es bilden sich 3 Druckknoten und 3 Druckbäuche.

Jeder Puls muß 2 ganze bzw. $4 * \frac{1}{2}$ Roundtrips zurücklegen um an seine Anfangsphase
 zurückzukehren.

Jeder andere Resonanzkandidat wäre auf gleiche Weise zustande gekommen. Ein erster Impuls,
 gefolgt von weiteren phasengleichen „Anstubsern“. Gemeinsam mit den rücklaufenden Pulsen
 bilden sich nach dem Einschwingvorgang „stehende Wellen“.

Die dargelegten Kriterien: 1 x geschlossenes Ende und 1 x offenes Ende geben somit vor, daß
 sich am geschlossenen Ende nur Druckbäuche einer stehenden Welle bilden können (keine
 Phasendrehung) und somit ein Aufsummieren und konstruktive Interferenz der entgegengesetzt
 laufenden Wellenzüge.

Andererseits am offenen Ende nur Druckknoten, einerseits weil vor- und rücklaufende Pulse 180°
 verdreht= + und – vertauscht laufen und sich am Punkt der Drehung somit auslöschen müssen =
 ergibt letzten Druckknoten, und andererseits weil sich der Druck am offenen Ende sofort dem
 Umgebungsdruck angleicht (dem sind die vielen Formeln Wurst!); es gibt aber einen Zusammen-
 hang mit Z_{rad} und der Endkorrektur (akustische wirksame Verlängerung) bei offenen Rohrenden.
 Z_L = Impedanz am offenen Ende, Z_{rad} = Widerstand durch Abstrahlung/Radiation.

Eindimensionale, harmonische Longitudinalwellen

In einem langen und dünnen Rohr können sich Schallwellen nicht nur longitudinal ausbreiten,
 sondern auch mit höheren Schwingungsmoden. Diese höheren Moden entstehen allerdings erst
 bei sehr hohen Frequenzen, die in Blechblasinstrumenten keine praktische Bedeutung haben.

Der nächst höhere Schwingungsmodus würde sich erst oberhalb einer Grenzfrequenz von
 $\sim (0,586 * \text{Schallgeschwindigkeit}) / \text{Durchmesser}$, im Fall eines 12mm Rohres also 17.500 Hz,
 im Fall von 11 mm 18.200 Hz und im Fall von 100mm (Schallbecherende) ~2000 Hz ausbreiten.

Man beschränkt sich daher im Allgemeinen auf den eindimensionalen, longitudinalen Mode „0“.
 Flächen gleicher Phasen werden im Zylinder als Ebenen, im Konus als Kugelflächen = 90 Grad zur
 Wandung angenommen und die Mittelachse ist die Ortskoordinate (x). Auslenkungen und
 Amplituden werden üblicherweise auf der y-Achse dargestellt.

Wie üblich werden die Auslenkungen hier als Transversalwellen dargestellt, es sind allerdings
 Longitudinalwellen. Akustischer Fluß hat eine Richtung. Die Auslenkung zeigt zur Flußrichtung
 und diese ist vom geschlossenen zum offenen Rohrende. Am besten stellt man sich eine Made vor,
 die sich ohne seitliche Auslenkung nach vorne „robbt“. Mit jedem -> eins zurück und 2 vor -->



-->> Ausbreitungsrichtung, Auslenkung positiv: vorwärts, negativ rückwärts.

Wellengleichungen:

Wellenausbreitung: Ort und Zeit hängen über die Schallgeschwindigkeit² zusammen:

Longitudinal waves,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Transverse waves,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Torsional waves,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

where ξ is the particle displacement in the longitudinal plane, y is the particle displacement in the transverse plane and ϕ is the rotation angle.

Das sind jeweils die 2. Ableitungen:

$$\omega^2 = c^2 * k^2 \quad \text{bzw.} \quad \{ 1/(c^2) \} * \omega^2 = k^2$$

und stehen über das Quadrat der Geschwindigkeit zueinander in proportionaler Beziehung nach der Zeit dt: mit Frequenz=Beschleunigung -> Newton Masse*Beschleunigung (kinetische+) nach dem Ort dx: 1/Wellenlänge = Krümmung der Steigung -> Hook potentielle Energie Es zeigt sich später, daß die kinetische und potentielle Energie jeweils 1/2 Anteil haben.

Die Wellengleichung für Ausbreitung harmonischer Wellen – als Momentaufnahme zur Zeit t:

$$y(x,t) = A * \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} * x - \frac{2\pi}{\lambda} * c * t \right)$$

- wenn die Welle nach rechts läuft

$$y(x,t) = A * \cos \left(k * x - k * c * t \right)$$

+ wenn die Welle nach links läuft

$$y(x,t) = A * \cos \left(k * x - \omega * t + \phi_0 \right)$$

t = Zeit in Sekunden

vereinfacht und gekürzt:

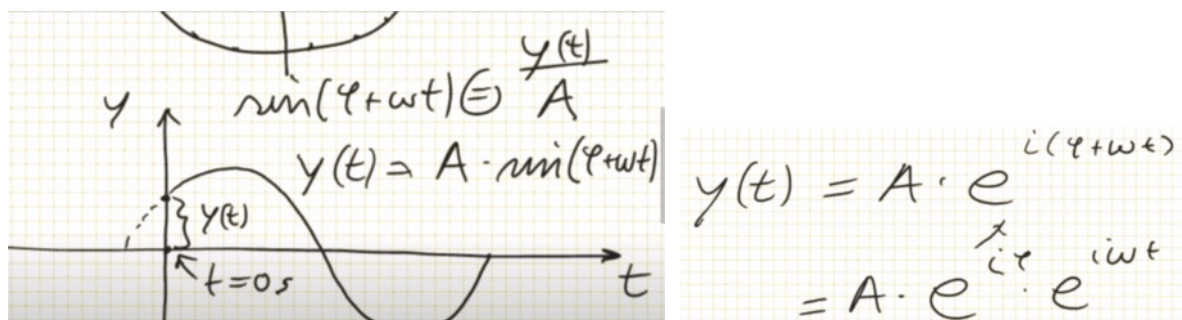
$$y(x,t) = A * \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c * t}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

$c * t$ = die Funktion wandert

ϕ_0 = cos an der Stelle x zur Zeit t

A = Amplitude, λ Wellenlänge, ω = Kreisfrequenz

k=Kreiswellenzahl, x = Ort, c=Schallgeschwindigkeit, t = Zeit in Sekunden, ϕ Phi Winkel in Radiant das Argument von Cosinus ist der Winkel in Radiant, 360 Grad = 2π = 6,28.... Radiant



Eulersche Notation: $A * \sin(\phi + \omega t)$ = harmonische Welle

kann zerlegt werden: statt $e^{i(\phi + \omega t)}$ in $e^{i\phi} * e^{i\omega t}$;
A ist der Zeiger(länge), die komplexe Amplitude ist $A * e^{i\omega t}$.

die komplexe Formel lautet:

Realteil: $A * \cos(\phi)$

Imaginärteil: $A * \sin(\phi)$

$$y(x,t) = A * \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Zeigerlänge $r = A * \text{Wurzel aus } (\text{Realteil}^2 + \text{Imaginärteil}^2)$
= Hypothenuse -> Pythagoras

$\phi = \arctan(\text{Imaginärteil}/\text{Realteil})$

ϕ öffnet sich gegen den Uhrzeigersinn

Partielle Differentialgleichungen und Ableitung harmonischer Wellen:

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

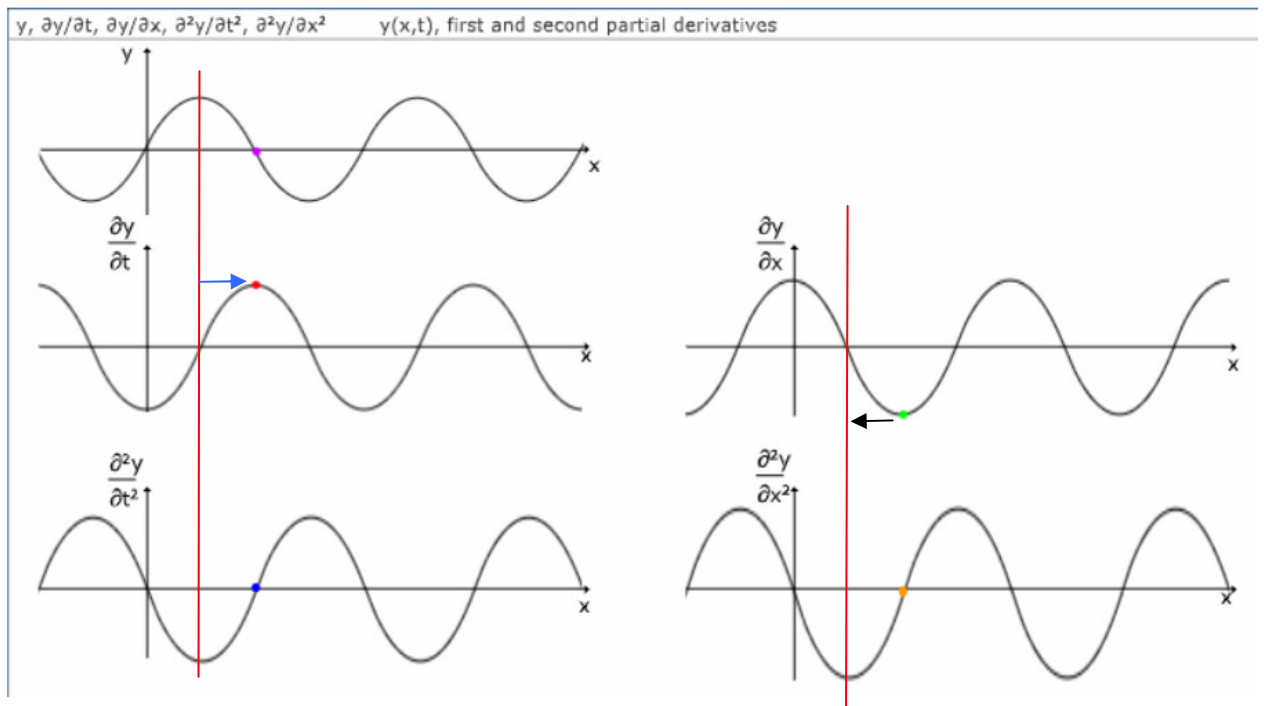
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

which we can also see below, as functions of x by graph and as functions of t by animation.



Mathematische Ableitungen harmonischer Wellen und Zusammenhänge:

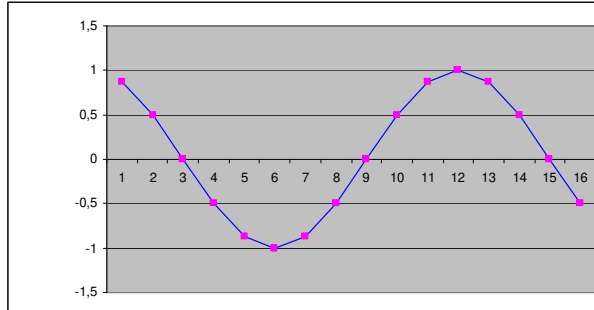
$$\omega = 2\pi \cdot f,$$

$$\omega = 2\pi / \text{Periode } T$$

$$k = \omega / c,$$

$$k = 2\pi / \text{Wellenlänge } \lambda$$

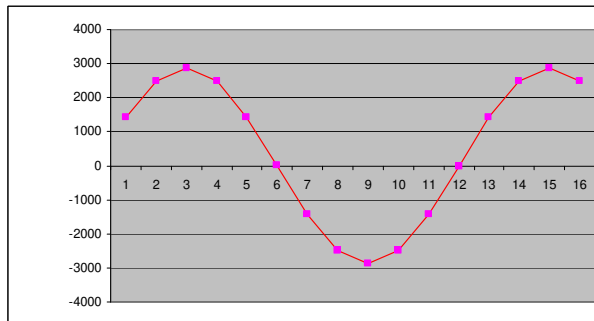
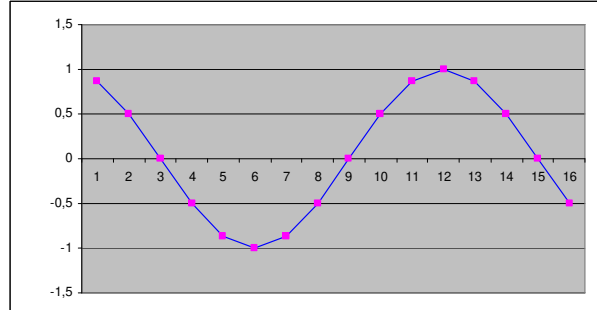
Folgende Größen, Nullstellen, Maxima und Zusammenhänge ergeben sich daraus:



--> x_1/t_1

Funktion $f(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$

mit $t=0$, φ_0 hier $= \pi/16$



--> t (Zeit) dy/dt 90 Grad gegen UZS

1. Ableitung nach der Zeit (t)=Mom. Geschw.

$$A \cdot -\sin(kx - \omega t) \cdot -\omega$$

$$= +A \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot +\omega$$

gibt: (+/-) A max wo Frequenz $\cdot 2\pi = \text{Omega } \omega$

hier $\omega = 2882 / 2\pi = 459 \text{ Hz}$

-c = mittlere Entfernungsgeschwindigkeit = $-\omega / k$

dy / dt

--> x (Ort) dy/dx -90 Grad gegen UZS

1. Ableitung nach dem Ort x = Steigung

$$A \cdot -\sin(kx - \omega t) \cdot k$$

$$= -A \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot k$$

gibt (+/-) A max wo k von λ liegt,

hier $k = 8,377$ $\lambda = 2\pi/k =$ hier $0,75 \text{ m } \lambda$

hier 344 m/Sek.

$$= -c \cdot dy / dx$$

$$c = \omega / k \quad \omega = k \cdot c \quad k = \omega / c$$

$$c = \text{Meter/Sek.} \rightarrow 1/c = \text{Sek. / Meter} = \text{Dauer}$$

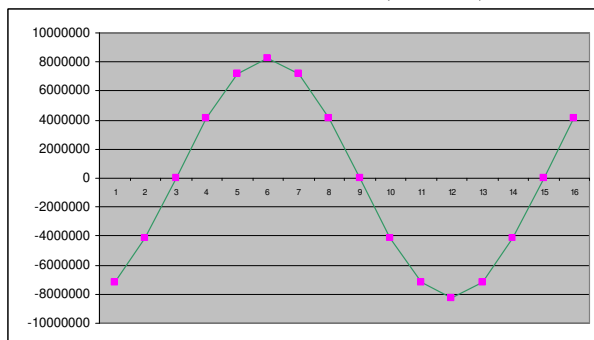
$$1/c \cdot (0,0029) \cdot \omega = k$$

$$\lambda = T \cdot c = c / f$$

$$\text{Periode } T = \text{Sek.} / \lambda$$

$$= 2\pi / k$$

$$\lambda = T / (1/c)$$



2. Ableitung nach der Zeit (t)=Beschleunigung

$$A \cdot -\cos(kx - \omega t) \cdot (-\omega^2)$$

$$\text{gibt: } -A \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot +\omega^2$$

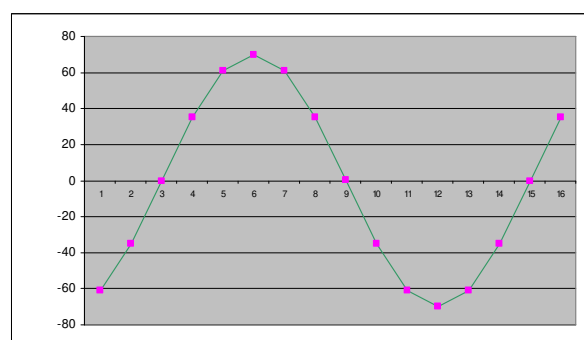
gibt: Beschleunigung a , +Richtung

$$\omega^2$$

$$/$$

$$\omega^2$$

$$=$$



2. Ableitung nach dem Ort (x) = Krümmung

$$-A \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot k^2$$

gibt Rückstellkraft + Richtung der Kraft

$$k^2 = c^2 = \text{hier } 118336, \rightarrow c = 344 \text{ m / Sek.}$$

$$k^2 \cdot c^2 \text{ bzw. } \{ 1/(c^2) \} \cdot \omega^2 = k^2$$

2 Extrembeispiele um die verwendeten/vorkommenden Werte zu verstehen:

Bei einer (mittleren, aber konstanten) Ausbreitungs- (Phasen-) Geschwindigkeit von $c=344 \text{ m / Sekunde}$ = keinerlei Dispersion (=frequenzabhängig unveränderte Phasengeschwindigkeit):

1 Hz hat eine λ von 344m, eine Periode $T=1/1 \text{ Sek}$, $k=2\pi/\text{Wellenlänge}\lambda$
 $\omega=2\pi / 1 \text{ rad/Sek}=6,2831..$ $k=2\pi/c=0,01826 \text{ rad/Meter}$ $k/2\pi = f/c = 1/\lambda = 0,0029 \text{ Wellenzahl}$
 $1/k = \text{Meter pro Radian} = 54,749 \text{ m} \cdot 2\pi = 344 \text{ m pro Vollwinkel (Kreisumrundung bzw. } 360^\circ).$

344 Hz eine λ von 1m, eine Periode $T=1/344 \text{ Sek}$, $k=2\pi/\text{Wellenlänge}\lambda$
 $\omega=2\pi \cdot 344 = 2161,4 \text{ rad/Sek}$, $k=\omega/c=6,2831 \text{ rad/Meter}=2\pi$ $k/2\pi = f/c = 1/\lambda = 1,0 \text{ Wellenzahl}$
 $1/k = \text{Meter pro Radian} = 0,1591 \text{ m} \cdot 2\pi = 1,0 \text{ m pro Vollwinkel (Kreisumrundung bzw. } 360^\circ).$

$\omega / 2\pi = \text{Frequenz Hz}$ $\omega / k = c \text{ Phasengeschwindigkeit}$ $k/2 \pi = \text{Faktor Frequ. zu } f / c = 1/\lambda$

daraus ergibt sich: Für eine Frequenz z.B. 1,5/1 mal höher muß die Wellen-(Rohr-)Länge 1/1,5 (=kürzer) sein sofern die Phasengeschwindigkeit c gleich bleibt.

Die Zeit läuft ...Phasen = Zeit-Differenzen von max. Druck und Volumenfluß:

Folgende physischen Tatsachen müssen gegeben sein, damit wir von einem „Resonanzmode“ bzw. maximaler Resonanz = max. Energieübertragung Bläser->Instrument sprechen können:

| | | |
|-----------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| | nach dem offenen Rohrende: | am geschlossenen Rohrende: |
| Druckdifferenz: | 0 = Umgebungsdruck | maximale Druckdifferenz |
| Volumenfluß: | maximal | kein Fluß (Geschwindigkeit 0), |
| | Impedanz wesentlich kleiner als Z_c | charakt. Impedanz = Z_c . |

Im zeitlichen Ablauf einer Schwingung durchwandert Druck Zustände von -1,0 und +1 am geschlossenen Ende, **am offenen Ende bleibt die Druckdifferenz jedoch stets 0** (Pressure Node).

Im zeitlichen Ablauf einer Schwingung durchwandert Fluss Zustände von -1,0 und +1 am offenen Ende, **am geschlossenen Ende bleibt der Fluß jedoch 0**. (Flußknoten bzw. Velocity-Node.)

Man kann sich beide Komponenten als eingespannte Seile vorstellen: Das Druckpotential ist am offenen Ende fixiert, das Volumen-Flußpotential am geschlossenen Ende fixiert.

Kann die Anregungsfrequenz nicht exakt auf die Resonanzfrequenz des Rohres angepasst werden, so entsteht eine Dämpfung, die umso größer als auch die Fehlanpassung ist und eine Phasendifferenz der beiden Komponenten zueinander.

Druckbäuche: Ist die Anregungsfrequenz etwas tiefer als die Resonanzfrequenz des Rohres (aufsteigende Flanken der Impedanz-Peaks) so ist die Wellenlänge größer, die Druckknoten liegen weiter voneinander entfernt, das offene Ende bleibt ein Druckknoten: Der maximale Druckbauch hat seine Lage nicht mehr exakt am Eingang, (er bräuchte für max. Resonanz ein längeres Rohr), die effektive Druckamplitude ist hier geringer.

Volumenfluss: Das geschlossene Ende bleibt ein Flußknoten, der abschließende maximale Flußbauch würde etwas ausserhalb des Rohres liegen, weniger Flußamplitude am offenen Ende.

Ist die Anregungsfrequenz etwas höher (fallende Peakflanken) als die max. Resonanzfrequenz = bedeutet es würde für maximale Resonanz ein kürzeres Rohr benötigen, so sind Druckbauch am geschlossenen und Flußbauch am offenen Ende ebenfalls nicht an ihrem max. möglichen Wert.

Die Impedanz Z = Verhältnis von Druck zu Fluß wäre am offenen Rohrende = Z_L

Druck gegen ~ 0 zu sehr viel Fluß, ein Verhältniswert, der viel kleiner als die charakteristische Impedanz des Rohres ist. = Z_L gering über Null. Der geringste Wert ergibt sich wenn Druck- und Fluß um 90° versetzt sind. Dies ist der Fall, wenn hier der Fluß rein real wird und der Druck (übergangsweise =komplex) verschwindet, an Peak-Maxima.

Die Impedanz am geschlossenen Ende wäre Z_{in} maximaler Druck zu (theoretisch) keinem Fluß, wäre also wesentlich höher als die charakteristische Impedanz. Hier würde (nicht vorhandener) Fluss um 90 Grad versetzt liegen. Der Druck wäre rein real, der Fluß rein imaginär.

Liegt die Anregungsfrequenz unter der max. Resonanzfrequenz, dann gibt es einen Zeit = Phasenversatz zwischen Druck und Fluß. Der Druck hätte einen positiven Zeitvorsprung gegenüber dem Fluß, (anhand der fehlenden bzw. zu kurzen Rohrlänge), oberhalb der max. Resonanzfrequenz wäre er zeitlich später als der Fluß (anhand der zu langen Rohrlänge). Es ergibt sich am Peakmaxima daher durchgangsweise eine Phasenwinkel-Differenz von 0 Grad, fallend von vorlaufend positiv zu nachlaufend negativ.

Der max. mögliche Phasenversatz innerhalb einer „Resonanzdomäne“ sind ± 90 Grad = $\pi/2$ oder $1/4$ Periode der max. Resonanzfrequenz, hier liegen die Antiresonanzen und der Phasenversatz durchgangsweise ebenfalls Null, Druck wechselt von negativ =nachlaufend auf pos. = vorlaufend.

Die Formel für den Druckverlauf im closed-open Zylinder lautet:

$$P(x,t) = [C^+ * \cos(kx) + i \sin(kx) + C^- * \cos(kx) + i \sin(kx)] * \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

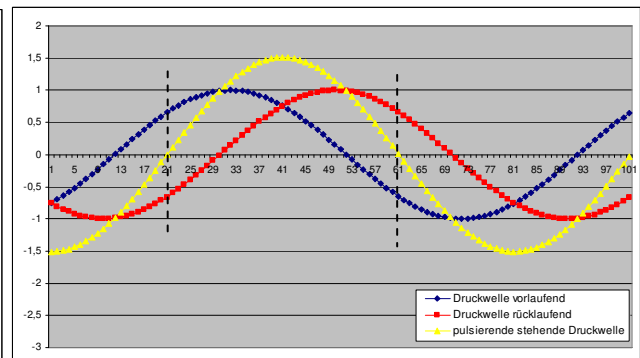
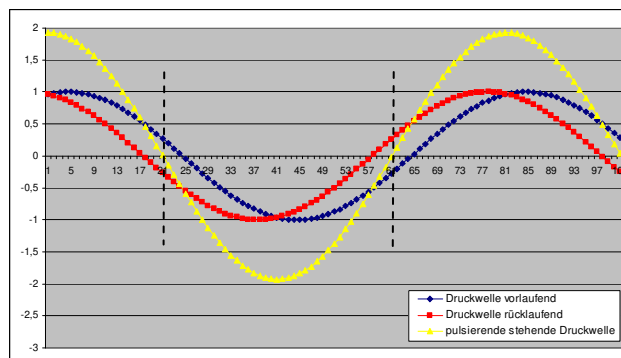
$$P(x,t) = [C^+ * \cos(kx) + i0] + [C^- * \cos(kx) + i0] * \cos(\omega t) + i0$$

Der Imaginärteil cancelt sich, daher:

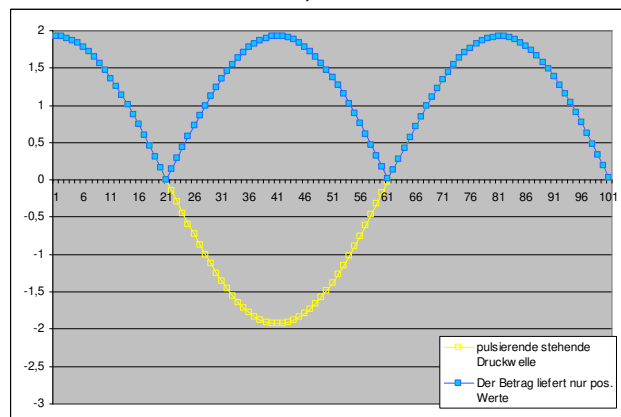
$$P(x,t) = \text{Re} = [2C^+ \cos(kx)] * \cos(\omega t) \quad \text{Im} = 0 \quad Z \text{ Betrag} = \text{Wurzel}(\text{RE}^2) \text{ oder Abs}(\text{RE})$$

Am offenen Ende ist auch bei abweichenden Anregungsfrequenzen ein Druckknoten, das gibt:

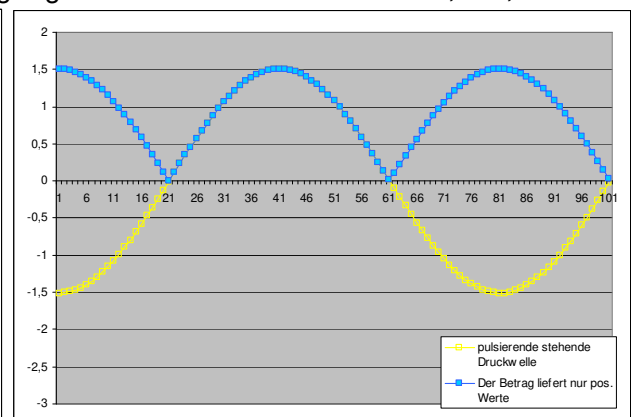
$$P(x,t) \text{ norm.} = \text{Re} = [-\sin(k(x-L))] * \cos(\omega t) \quad \text{Im} \sim 0 \quad Z \text{ Betrag} = \text{Wurzel}(\text{RE}^2) \text{ oder Abs}(\text{RE})$$



Mode 3, $t=0,1\text{ms}$: vor- u. rüchl. Wellenzüge summieren sich zu stehenden Wellen, *rechts* $t=0,9\text{ms}$ strichliert: Druckknoten, diese bleiben Nulldurchgänge und an diesen Positionen. $0,2+0,6\text{m}$



$t=0,1\text{ms}$



$t = 0,9\text{ms}$

So faszinierend Animationen von gegenläufigen Druckwellen auch sind, irgendwann interessieren die Ergebnisse, also die Muster stehender Wellen mehr. Die Berechnung wurden mit der Formel für komplexe Zahlen durchgeführt, der imaginäre Teil cancelt sich bei gegenseitig laufenden Druckwellen der Phasenwinkel=0, es wird daher nur noch der +Realteil angezeigt. (+/- Werte gelb)

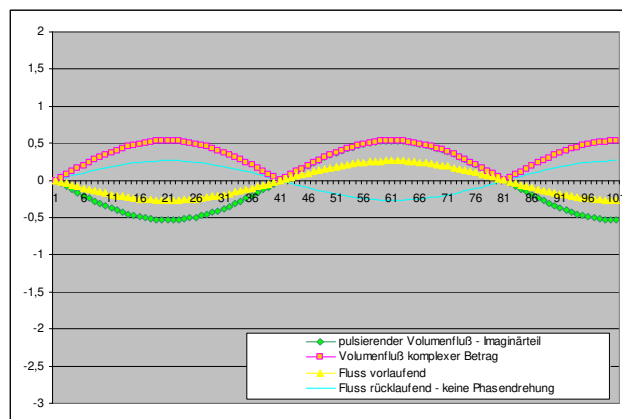
Ermittelt man den Betrag = Wurzel aus Realteil² + Imaginärteil² = Wurzel aus Re²+0 ergibt dann nur noch positive Beträge für Druckänderungspotential (blau).

Fluß: Hier haben wir ein anderes Verhalten im closed-open Zylinder:

$$U(x,t) = 1/Z_c * [C^+ * \cos(kx) + i \sin(kx)] - C^- * \cos(kx) + i \sin(kx) * \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

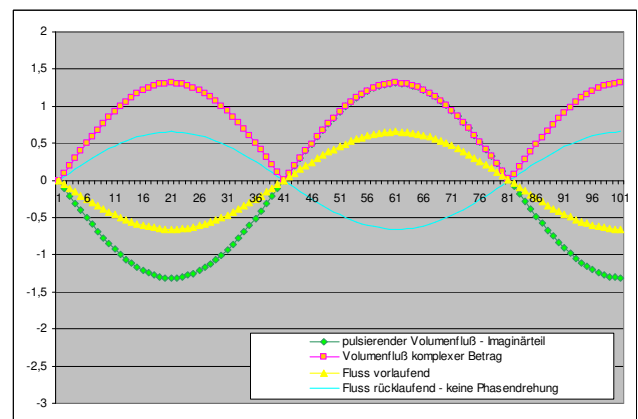
$$U(x,t) = 1/Z_c * [C^+ * 0 + i \sin(kx)] - C^- * 0 + i \sin(kx) * 0 + i \sin(\omega t)$$

$U(x,t) = \text{Realteil} \sim 0$, $\text{IM} = 1/Z_c * [2 * C^+ * -\sin(kx)] * \sin(\omega t)$ Z Betrag= Wurzel(Im²) oder Abs(Im)
Phasenwinkel = arctan(Im/Re) Tangens für 90 Grad nicht definiert = -Pi/2. = -90° bzw. ¼ WL.



Fluss: t=0,1ms

(Skalierungs-faktor 1/Zc fehlt hier)



Fluss: t= 0,9ms

1. der Realteil cancelt sich, Phasenwinkel=0 Grad (nicht dargestellt)
2. der Imaginärteil ist immer 90 ° gegenüber dem Realteil verschoben. (-sin eilt dem cos vor)
3. rücklaufender Fluss wird nicht addiert sondern subtrahiert
4. durch die Subtraktion wird der Gesamtfluß gegenüber dem vorauslaufend Fluss nicht geändert, sondern summiert sich zu einem max. möglichen Wert von 2,0.

Die vorlaufende Flusswelle läuft →, Realteil + Imaginärteil 90° später, aber die entgegengesetzten Wellen „laufen“ nicht. Sie pulsieren, es gibt von Anbeginn Flussknoten, aber eine Flussrichtung: → Ergibt: eine pulsierende Kurve mit Flussknoten, diese sind bei maximaler Resonanzfrequenz 90 Grad früher = ¼ WL oder auch ¼ Periode (wenn man den 1. Flußknoten am geschlossenen Ende betrachtet) als Druckknoten.

Partikel-Velocity und Volumenfluss begreifen

Der Volumen-Partikel-Fluss ist immer dann am höchsten, wenn er in der Mitte zwischen Druckbäuchen liegt, da diese alternierend lokalen Überdruck und Unterdruck bewirken. Hier fließt daher die max. mögliche Partikelanzahl im Wechselspiel vor- und zurück und versucht ständig einen Druckausgleich herzustellen – was, wie man sieht bei angeregter Schwingung nicht gelingt!

Entfällt die externe Anregung, dann gelingt das sehr wohl und flott.
Ist die externe Anregungskraft zu gering, dann detto (Ton bricht ab).

Die Rohrquerschnittfläche ist vorgegeben, die Zeitspanne anhand Periodendauer ebenfalls. Sollen bzw. müssen sich mehr Partikel durch den selben Querschnitt bewegen, so müssen diese das mit einer höheren Geschwindigkeit machen. (1. Ableitung der Funktion nach der Zeit). Geschwindigkeit ist ein Vektor, hat eine Richtung und wird bei 180° Richtungsänderung negativ.

Dazu ist Beschleunigungsarbeit notwendig: $\text{Force} = \text{Mass} * \text{acceleration}$, $a = \text{Force} / \text{Mass}$. Beschleunigung ist die 2. Ableitung der Funktion nach der Zeit, diese kann auch neg. sein. = „Entschleunigung“. (Kraft hat eine Richtung, ist ein Vektor)

Wir haben den Fall eines Flussmaximums, dieses entspricht mehr Partikeln in gleicher Zeit durch die gleiche Querschnittfläche gedrückt = höhere Partikelgeschwindigkeit = Schallschnelle gegenüber einer üblichen Ruhelage-Geschwindigkeit der Luftmoleküle. In Analogie entspricht dem akustischen Fluss die elektrische Stromstärke in Ampere = Ladungen (Coulomb) / pro Zeit.

Nimmt man jetzt Bernoulli, dann stellt man fest, eine lokal höhere Flussgeschwindigkeit mit Richtung \rightarrow ergibt einen lokalen Druckabfall = einen geringeren Überdruck. Ich behaupte jetzt einmal, eine höhere (negative) Flussgeschwindigkeit (weil) in Richtung \leftarrow bewirkt auch eine lokale Verringerung des Unterdrucks (geringeren Unterdruck). Dies würde alle vorkommenden Phänomene bereits größtenteils schildbürgerlich erklären.

Der akustische Fluss = die Bewegung, Geschwindigkeit der Partikel ist somit dann am geringsten, wenn sich diese im Zentrum eines Druckbauches/Unterdruckbauches befinden. Diese bekommen individuell pulsierende Unter- und Überdruckverhältnisse eventuell im Idealfall durch ihre Nachbarmoleküle gar nicht mit und erfahren keinerlei Beschleunigung in die eine oder andere Richtung, bewegen sich daher idealerweise gar nicht zusätzlich vor- oder rückwärts. Die Schallschnelle ist üblicherweise ziemlich langsam (Größenordnung $\sim 1 \text{ mm/Sek.}$)

Flußbäuche stehender Wellen = Resonanzmoden liegen (nahe) an Druckknoten, Flußknoten liegen (nahe) an Druckbäuchen. Nahe deshalb, weil sie einen Phasenversatz haben (werden). Es gibt also ein Verhältnis von Druck zu Fluss, dieses Verhältnis wird durch die frequenzabhängige Fluss-Impedanz $Z(f)$ beschrieben. Diese liegt über oder unter der charakteristischen Impedanz Z_c des Rohres die sich wiederum aus Querschnittfläche und Übertragungsmedium (Luft) ergibt.

Energie-Übergang und warum Impedanz-Mismatch nicht immer schlecht ist.

Nicht immer möchte man den Energiefluss zwischen 2 Teilen eines Systems maximieren. Man braucht den „Mismatch“ z. B. am Schallbecherende eines Blechblasinstrumentes um Reflektionen hervorzurufen und um die resultierenden Resonanzfrequenzen und Klangabstrahlung zu erreichen.

3 universelle Eigenschaften und Komponenten liefern die Zutaten der akustischen Fluss-Impedanz:

1. Masse ist verantwortlich für Widerstand gegen Beschleunigung

Für eine gegebene Kraft sind Beschleunigung und Masse invers proportional zueinander.

Das ist im 2. Newton'schen Gesetz verankert. (Bewegungsgleichung) $F = m * a$

2. Steifigkeit ist verantwortlich für Widerstand gegen Stauchung und Streckung (Kompression, und Dekompression). In der Federgleichung (Hook'sches Gesetz), $F = -k * x$ wobei F die Kraft ist, k die Federkonstante und x die Auslenkung (die Feder darf aber nicht überspannt werden..)

3. Reibung / Viskosität bedeutet Energieumwandlung in Wärme und parasitäre (Wand)-Schwingungen

Definition und Messung von Impedanz, die reaktiven Anteile der Impedanz:

Wir messen Impedanz, in dem wir eine harmonisch vor-und rückschwingende Kraft aufwenden.

Die Impedanz wird von der Frequenz dieser Anregungskraft abhängen. Das Objekt, das wir anregen wollen sind lumped = zusammengeballte „Luftpakete“, wir sehen nicht auf jedes einzelne Luftmolekül, sondern betrachten bei der Berechnung und Erklärung der Vorgänge eine dünne Scheibe vom Rohrquerschnitt – damit es ein Volumen und somit Masse hat mit einer minimalistischen Länge. Ähnlich einem Schieber wollen wir diese Scheibe periodisch vor- und rückwärts schieben.

Wenn die Periode (die Zeitdauer einer Schwingung bis zu deren Wiederholung) dieser Anregungsfrequenz sehr kurz ist (hohe Frequenz), werden sich die Luftpakete nicht stark bewegen, durch das schnelle Hin- und Herbewegen der Anregungskraft bleibt zu wenig Zeit für die „Scheibe“ um auf hohe Geschwindigkeit zu kommen. Die resultierende akustische Impedanz = sich etwas entgegenstellen wird von der Masse der Scheibe dominiert (Trägheit, Induktivität). Die angewendete Kraft bleibt gleich = Beschleunigung sinkt.

Wenn die Frequenz tief und somit die Zeitperiode lang ist, hat die Kraft mehr Zeit und wird langsamer aufgebracht. Die beobachtete Impedanz wird dann von der Steifigkeit Kapazität/Compliance dominiert.

Wird die Luftscheibe mit einer Frequenz angeregt, wo Masse- und Steifigkeit (gemeinsam mit Reibung) ein Gleichgewicht haben, so wird das Objekt am stärksten hin- und herschwingen – also einen starken Response zur Kraft - Anregung zeigen, hier wäre ein sehr geringer Widerstand und somit geringe Impedanz, ein lokales Impedanz Minimum. Bei einer solchen Situation und Frequenz herrscht also maximal möglicher (Fluß=Bewegung), aber kaum Druckdifferenz zum atmosphärischen Druck. Hier wird am effektivsten Energie weiter transportiert. Rohre mit 2 offenen Enden resonieren auf Z_{min} , haben nur 1 Roundtrip.

Wir haben hier bei einer closed-open Geometrie aber das Gegenteil einer Resonanz. Das bedeutet im Gegenzug, daß an einer Resonanzfrequenz kaum Fluss stattfindet, kaum etwas bewegt wird, aber starke Druckschwankungen auftreten. Wir müssen also feststellen, daß bei stehenden Druck-Wellen die Energieübergabe stark behindert wird, die Energie bildet, „bleibt und treibt“ quasi die stehende Welle an.

Was muß dann zwischen Antiresonanzen und Resonanzen passieren? Oberhalb einer Antiresonanz (viel Bewegung) muß die Bewegung abnehmen, langsamer als Anregung = Masse / Induktion dominiert = **+I**, die Federsteifigkeit / Kapazität muß abnehmen **-C**, Situation an aufsteigenden linken Peakflanken).

Andererseits liegt jeder Impedanz Peak wiederum unter einer höheren Antiresonanz mit (viel Bewegung). Die Federsteifigkeit müsste daher dominieren **+C**, die Masse/Trägheit müsste geringer werden **-I**, wobei ja die Perioden stetig kürzer werden, was impliziert, daß die Masse bzw. Trägheit stetig dominanter werden muß, die Federsteifigkeit zunehmend nachlässt. **+I -C**. Wir beobachten, daß Peaks mit zunehmender Frequenz geringere Impedanzmaxima aufweisen, allen Vorgängen bleibt stetig steigend etwas weniger Zeit. Trägheit/Induktanz **I** dominiert, die Federsteifigkeit **C** kann das nicht mehr vollständig ausgleichen, auch die Minima sind dann nicht mehr so scharf, d.h. sind weniger stark ausgeprägt und haben höhere Z Werte.

Bei jedem Peak wäre dann: Masse/Induktivität: **I+ + I- = ~0I** und Steifigkeit **C- + C+ = ~0C**. Fluss: **~0**
Der reale Reibungswiderstand würde bleiben, die kapazitive und die induktive Komponente würde sich übergangsweise verflüchtigen. Das kann man auch beobachten, der Realteil erreicht die Zeigerlänge (Z -Magnitude, dh. der Widerstand wird ein realer Wert. Der **Phasenwinkel** Druck-Fluss = Zeitunterschied ist an der **aufsteigenden linken Peakflanke positiv** und hat folglich die Attribute **+I Trägheit** und **-C Steifigkeit**, an der **abfallenden rechten Peakflanke negativ** und hat folglich die Attribute **-I Trägheit** und **+C Steifigkeit**.

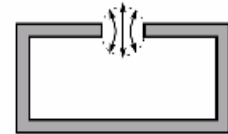
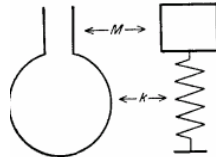
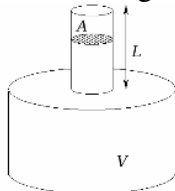
Das klingt plausibel, denn die 2. Zutat Steifigkeit ist verantwortlich für Widerstand gegen Stauchung und Streckung, diese muß sich an einem Druckbauch (= maximale Kompression und Dekompression) möglichst verflüchtigt haben! Die Masse der zu bewegenden Luftpakete muß sich ebenfalls max. reduziert haben, denn im Zentrum des Druckbauches bewegen sich diese im besten Fall gar nicht mehr vor und zurück. An den Impedanz Minima steigt der Phasenwinkel = Zeitunterschied von (Druck-Fluss) wieder durch Null auf die positive Seite. Trägheit dominiert nun wieder. Wir haben beide Attribute als Paket, können Sie also nicht einzeln auswerfen, sie ergeben sich als reaktiver Blindanteil, dieser wird durch die Phasenwinkel – Differenz +/- (gegenüber 90°) wiedergespiegelt, als auch durch die Form der Impedanzkurve über der Frequenzskala.

Es klingt vielleicht auf den ersten Blick erstaunlich, daß an Impedanz Minima die meiste Energie übertragen würde, diese steht allerdings für die Bildung von stehenden Wellen dafür nicht zur Verfügung. Andererseits stellen die Lippen (und Messkopf) eine hochohmige Quelle dar, und hier erfolgt der maximale Energie-Übertrag an Druckbäuchen = Impedanz Maxima durch Zugabe zeitlich passender phasenrichtiger Druck- und Unterdruckvariationen.

Helmholtz Resonator

Absorber / Raumakustik / bedämpfen ungewünschter Frequenzen / Raummoden:

Poröse Materialien absorbieren Schall (Umwandlung in Wärmeenergie) am effizientesten wo die Schallschnelle am größten ist; das wäre bei Wänden (Velocity Node=Reflektion) -> eine $\sim \frac{1}{4}$ Wellenlänge Abstand vor der Wand. (=Pressure Node). Das wäre bei tiefen Frequenzen weit im Raum. Helmholtz Resonanzabsorber werden hingegen möglichst nahe am Schalldruckmaximum = an der Wand bzw. Ecken platziert. (Die reflektierende Wand ist mit der „geschlossenen“ Seite eines Rohres vergleichbar.)



Einseitig zum Hals hin offenes Volumen, der Hals ($A \cdot L$) ist 2 seitig offen. *Halslänge* $\sim 0 + 2x$ *Korr.*

Jeder Helmholtzresonator besteht aus einem Resonatorvolumen und einem Resonatorhals. Die Funktion ergibt sich aus der Schwingung und Dämpfung eines Masse-Federsystems. Das einfachste Beispiel eines Helmholtzresonators ist eine leere Glasflasche: Bläst man über deren Rand, so ertönt ein Ton. Es schwingt dabei der Luftpfropfen des Flaschenhalses (=Masse) gegen die in der Flasche eingeschlossene Luft (=Feder). Dabei ist die Luftgeschwindigkeit im Resonatorhals am schnellsten.

Die Resonanzfrequenz f_0 eines Helmholtzresonators ist abhängig von den Dimensionen des Resonatorhalses sowie des Resonatorvolumens. Die Masse M des Luftpfropfens im Resonatorhals ergibt sich (in kg) aus der Dichte der Luft ρ_0 , der Halslänge L , sowie der Halsquerschnittsfläche A .

Da der wirksame Luftpfropfen nicht abrupt mit den Halsenden aufhört, sondern tatsächlich etwas länger als die Halslänge ist, muss $2x$ eine Mündungskorrektur ΔL hinzugefügt werden.

Die Korrektur gilt für den Radius R und einen im Vergleich zur betrachteten Frequenz kurzen Hals:

$$\Delta L \approx \frac{\pi}{4} \cdot R$$

Korrektur pro Halsende lt. Helmholtz:

Die Federkonstante K errechnet sich aus der Dichte der Luft ρ_0 , der Halsquerschnittsfläche A , der Luftgeschwindigkeit c , geteilt durch das Volumen V des Resonators (ohne Hals) in Meter.

$$\text{Masse (Hals)} = \text{Dichte} \cdot \text{Volumen} = \rho \cdot (l_0 + 2\Delta L) \cdot S \quad [\text{kg}] \quad \text{Federkonstante } K: \quad = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{S^2}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right]$$

Die Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist:

Aus ihr errechnet sich die Resonanzfrequenz f_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = c \sqrt{\frac{A}{V \cdot L}} + 2\Delta L$$

($A=S$), tiefste Resonanzfrequenz \approx

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V \cdot (L + 2\Delta L)}} \quad [\text{Hz}]$$

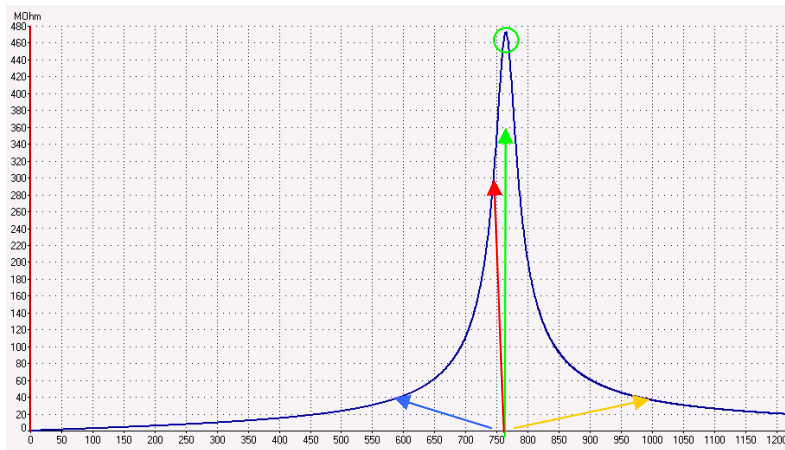
mit $2x$ Mündungskorrektur.

Eine Okarina = ein variabler Helmholtz-Resonator:



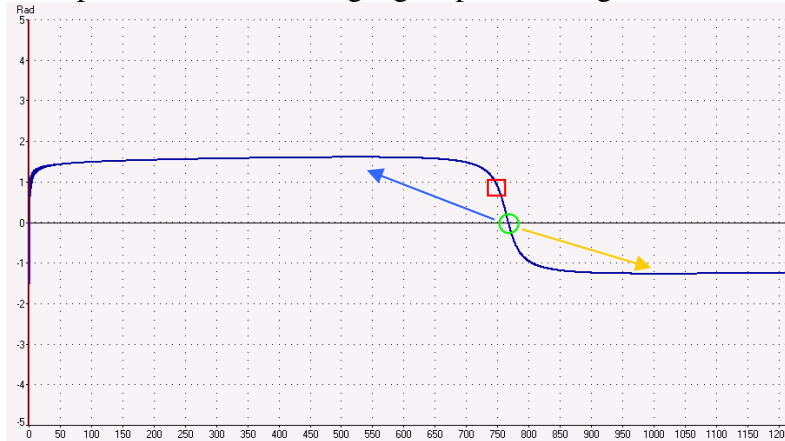
Form und Position der Löcher ist nicht entscheidend für die result. „Resonanzfrequenz“, sondern die Anzahl und Größe der Löcher und somit „Masse“ die auf die Feder (Innenvolumen) wirkt.

Akustische Eingangsimpedanz eines Trompetenmundstückes (Helmholtz-Resonator):



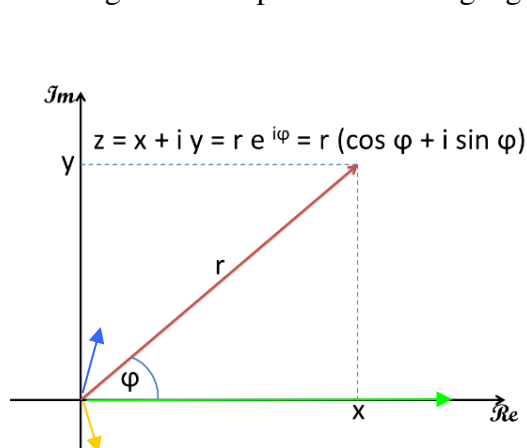
x = Frequenz in Hz

Trompetenmundstück, Eingangsimpedanz Magnitude MOhm $y = |Z|$ Betrag bzw. r im Einheitskreis



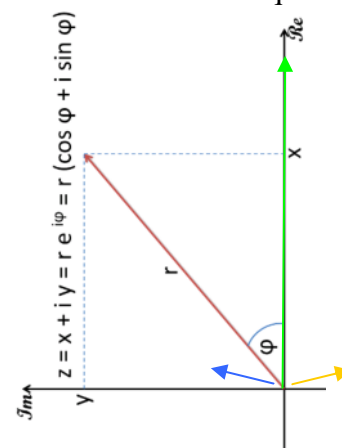
y : $\pm 1,57 \text{ Rad} = \pm 90 \text{ Grad}$

Trompetenmundstück, Eingangsimpedanz Phasenwinkel φ Druck zu Fluß in Rad,
die imaginäre Komponente der Eingangsimpedanz. (Rot $\sim -3\text{dB}$ untere Grenzfrequenz $\sim 45 \text{ Grad}$)



Zeigerlänge r = Betrag = Magnitude der Eingangsimpedanz

Phasenwinkel φ = Winkeldifferenz von Druck zu Fluß in Radian



hier um 90 Grad gedreht

da Re Achse $x \rightarrow y$ Magnitude

grün = selber Phasenwinkel = keine Winkeldifferenz = max. Magnitude bzw. Resonanz

blau = positiver Phasenwinkel Druck zu Fluß = Resonanz stark gedämpft

Gelb = negativer Phasenwinkel Druck zu Fluß = Resonanz stark gedämpft

nicht gezeigt: φ aufsteigend Nulldurchgang = Antiresonanz (alle Pfeile sind symbolisch platziert)

Angeregte Schwingung: Lippen müssen für max. Resonanz mit 90° Phasenversatz schwingen!

Akustische Impedanz, Intensität, Power (Leistung)

Sie erlaubt uns akustische Leistung **P** und Intensität **I** in Relation mit akustischem Druck und Fluß zu bringen und um die Reflektion und Transmission an Boundaries = Grenzen zu berechnen.

Im folgenden ist „akustisch“ die periodisch oszillierende Komponente. Die Geschwindigkeit **c** bzw. **v** für Velocity bezeichnet die Schallausbreitung in m/Sekunde, **u=v**= Schallschnelle oder Particle Velocity. **U** den Volumenfluß, **p** steht für Pressure bzw. akustischem Druck (Abweichungen zum atmosphärischen Druck) und **ρ** für die Dichte des Mediums, **d** oder **Δ** steht für Differenz. **A** = Area bzw. Fläche, **V** = Volumen, **t** steht für Time = Zeit in Sekunden, **x** für Ort, **y** Funktionswert.

Die spezifische akustische Impedanz (eines Übertragungsmediums, z.B. Luft):

Die spezifische akustische Impedanz **z** ist eine intensive Eigenschaft eines Mediums anhand von Dichte, Schallausbreitungsgeschwindigkeit und wie stark es sich komprimieren lässt.

Die spezifische akustische Impedanz **z** ist $z = p / u$ =

| | | | |
|----------------|-----|-----------------------------|--|
| das Verhältnis | von | akustischem Druck p | = Kraft/Fläche |
| | zu | spezifischem Fluss u | = Particle-Velocity, Schallschnelle (v) |

was dem Fluss pro Flächeneinheit entspricht, bzw. der akustischer Flussgeschwindigkeit **u**.

Schallwellen Ausbreitung - Gleichung

Partikel Auslenkung **y** als Funktion des Ortes und der Zeit (Welle läuft nach rechts):

$y = A \sin(kx - \omega t)$ mit $y_m = \max$. Auslenkung, wo

A = displacement amplitude

k = Kreiswellenzahl ($k = 2\pi/\lambda$)

ω = Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$)

κ = adiabatic bulk modulus für das Medium = eine spezifische Elastizitäts-Konstante

ρ = Dichte des Mediums = Masse (Gewicht) / Volumen

Die Auslenkung einer Welle (potentielle Energie) unterliegt einer rücktreibenden Kraft **F**,

$F = y \cdot -D = y = F/-D$ $-D = D / y$ $D = \text{Federkonstante, } m = \text{Masse (Dichte} \cdot \text{Vol.)}$

Es ergibt sich, daß $\omega = \text{Wurzel aus } (D/m)$, $\omega^2 = D/m$, und somit $D = \omega^2 \cdot m$ $\omega^2 / k^2 = v^2$

1. Ableitung nach der Zeit

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_m \omega \cos(kx - \omega t)$$

particle velocity $u(x,t)$

mit $y'_{\max} = \omega \cdot A$ **Kreisfrequenz der Welle**

1. Ableitung nach dem Ort

$$p = -\kappa \frac{\partial y}{\partial x} = -\kappa y_m k \cos(kx - \omega t)$$

acoustic pressure $p(x,t)$

mit $y'_{\max} = k \cdot A$ **Länge der Welle**

Die spezifische akustische Impedanz eines Mediums $z = p / u$ so ist z auch $= \kappa \cdot k / \omega$

$\kappa / \rho = v^2 \rightarrow$ gibt $\kappa = \rho v^2$ und da $\omega / k = v$ $z = \rho \cdot v$ = Dichte * Schallgeschwindigkeit

durch Umstellen findet man, daß

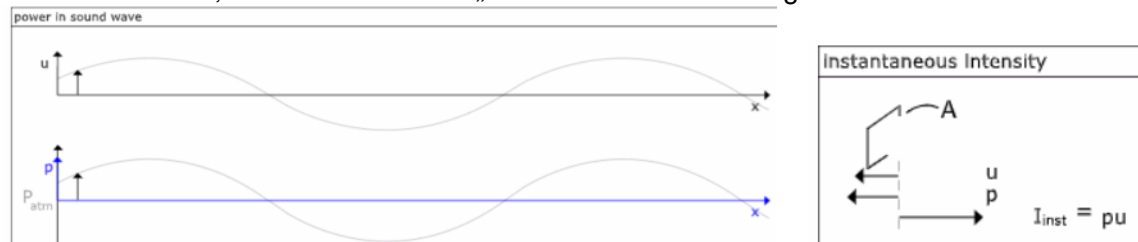
$$u = p / z = p / \rho \cdot v$$

$$v = u / p = \omega / k$$

Schall Intensität und Leistung als Funktion der Zeit

Die Intensität ist definiert als die Leistung pro Flächeneinheit.

Eine wandernde, eindimensionale „ebene“ Welle / travelling wave:



Druck p und Particle Velocity = Schallschnelle u sind hier in Phase, auch wenn beide momentan negativ sind, bleibt eine „pulsierende“ Intensität die periodisch variiert immer positiv,

Energie pro Fläche =

Schall Intensität I moment = $p * u$
= nur positiv = $p^2 / \rho * v$

Bei einer periodischen sinusförmigen Schwingung mit Druckamplitude p_m ($m = \max.$) ergibt sich

$$\text{Intensität } I \text{ moment} = I_{\text{inst}} = \frac{p_m^2 \sin^2 \omega t}{z} = \frac{p_m^2 \sin^2 \omega t}{\rho v}$$

Die momentane Intensität ist proportional zum Quadrat des Drucks, der arithmetische Mittelwert über dem zeitlichen Verlauf der Druckmagnitude ist $p^2(t) =$ Mittlere Intensität = $\frac{1}{2} * p^2 / \rho * v$

Die Definition von Druck p ist Kraft F pro Fläche $A =$ Kraft $F = p * A$

Die akustische Flussgeschwindigkeit der Luftpartikel = Schallschnelle = Partikel Velocity ist u .

Die Energie P durch eine Arbeit W , die an einem Punkt mit Geschwindigkeit v in der selben Ausbreitungsrichtung angewendet wird ist $P = F * u$ Arbeit $W = \text{Kraft} * \text{Weg}$

und entspricht somit

Schall Leistung P moment = $F * u = p * A * u$

Üblich ist es oft, den RMS Wert zu betrachten P_m $m =$ maximale Amplitudenauslenkung:
Pressure (RMS) = $P_m / \text{Wurzel}(2) = \text{Wurzel}(1/2) * P_m$

$$I = zu^2 = \rho cu^2 = \rho c \omega^2 y^2 \quad I = \frac{1}{2} zu_m^2 = \frac{1}{2} \rho cu_m^2 = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 y_m^2$$

mit Rms Partice Velocity u , Displacement y mit Maximum Partice Velocity u_m , Displacement y_m :

Volumenfluß und charakteristische Impedanz Z_c bzw. Z_o (in einem Rohr):

In einem eher speziellen Fall einer initialen sich ausbreitenden Welle in einem Rohr sind Druck p und Partikel Velocity u noch in Phase und der akustische Volumenfluss ist einfach $U = A * u$.

Betrachtet wird eine ebene eindimensionale Welle, die durch eine Querschnittsöffnung A hindurchwandert. Der Volumenfluß ist das Volumen, das pro Sekunde durch diese Öffnung durchwandert. Wenn der Fluss eine Strecke $dy = u * dt$ wandert, dann beträgt das Volumen welches verschoben wird = $A * dy$,

$$U = \frac{dV}{dt} = A \frac{dy}{dt} = Au \quad Z = \frac{p}{U} = \frac{p}{Au} = \frac{z}{A}$$

Volumenfluss $U =$ Fläche * Schallschnelle. Z Fluss = spezif. Imp. z / Fläche A

1. Ableitung nach der Zeit = Schallschnelle u

Obiges gilt für 1-dimensionale Wellen ohne Reflektionen. In der Praxis ist das komplizierter, denn es ergibt sich eine Summe an vor- und rücklaufenden Wellen durch Reflektionen an Rohrenden, egal ob diese offen oder geschlossen sind. In „Abwesenheit“ dieser Reflektionen bezeichnet man diese Größe als charakteristische Impedanz $Z_{\text{char.}} = \rho * v / A$

Für die Zeit bis $2 \cdot L / \text{velocity} = 1$. „Roundtrip“ wirkt das Rohr effektiv als „unendlich lang“, erst danach kommen die ersten Reflektionen vom anderen Rohrende wieder am Eingang an.

Hier kann die char. Impedanz Z_0 als Größenordnung für die Skalierung des tatsächlichen akustischen (Fluss-)Impedanzspektrums Z definiert werden, (man braucht ein sehr langes Rohr)

$$Z_0 = p/U = p / A \cdot u = z/A = \rho \cdot v / A \quad \text{Dichte} \cdot \text{Velocity} / \text{Fläche}$$

Die Fluß Impedanz (innerhalb einer Geometrie mit einem Übertragungsmedium, z.b. Rohr):

Die akustische (Fluss-)Impedanz Z ist die Eigenschaft einer bestimmten Geometrie und Medium, z.b. ein Rohr das mit Luft gefüllt ist. Üblicherweise variiert Z stark mit Frequenzänderungen. Bei jeder bestimmten Frequenz ist sie ein Hinweis darauf, wie viel akustischer Druck p durch einen gegebenen akustischen Volumenfluss U bei dieser Frequenz auftritt.

Die akustische (Fluss-)Impedanz Z ist $Z = p / U$ = Druck zu Vol.Fluss

das Verhältnis (Faktor, bzw. Ratio) von
zu akustischem Druck p
akustischem Volumenfluss U

Compliance = Dehnbarkeit = Federsteifigkeit C:

Wenn ein kleines Volumen durch eine Schallwelle komprimiert wird, sorgt der Volumenfluss dafür, daß dessen Luft komprimiert wird und erhöht dessen Druck. Es verhält sich wie eine „Compliance“. Compliance beschreibt die Druckänderung pro Volumen, Capacitance die Volumenänderung anhand Druck. Beide Begriffe stehen für Dehnbarkeit, Elastizität, Federsteifigkeit. $F = -kx$

Inertance / Induktanz / Masse und Beschleunigung = Trägheit I:

Wird ein kleines Volumen durch eine Druckdifferenz im Schalldruck beschleunigt, wird der akustische Volumenfluß von der Druckdifferenz bestimmt und es verhält sich als „Inertance“.

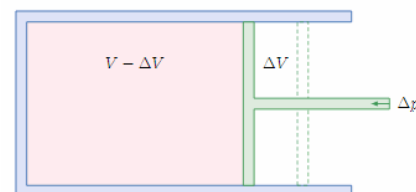
Die Massenträgheit = Inertia des strömenden Mediums, in diesem Fall der Luft, als auch Reibung an der Rohrwand bewirkt eine Verzögerung der Bewegung bei Druckdifferenz. Dies bedeutet, dass eine plötzliche Druckdifferenz erst nach einer gewissen Zeit zu einer Strömung führt. $F = ma$

Luft als elastisches Medium, Druck und Volumen:

Wenn das Volumen eines Mediums komprimiert wird, steigt lokal dessen Dichte und Druck. Die Dichte verhält sich entgegengesetzt proportional zur Volumenänderung. Beim Druck ist das etwas anders. Der notwendige Verhältnisfaktor von Druckzunahme gegenüber Volumenreduktion ist als „Volumetric modulus of elasticity“ = κ erforderlich. Das ist zwar eine nichtlineare Gleichung, es zeigt sich aber, daß solange der Differenzdruck gegenüber Umgebungsdruck gering bleibt - und das ist der Fall - es bei Schallwellen in Luft eine exzellente lineare Annäherung darstellt.

Der adiabatische Bulk modulus $B = 1 / \kappa$

(adiabatisch = Temperaturänderungen werden als nicht vorhanden betrachtet)



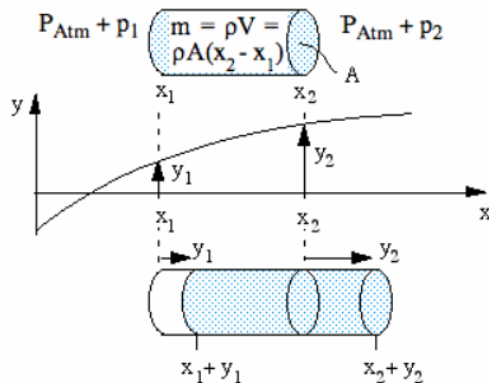
Compression of a gas due to increases in applied pressure. The bulk modulus of a gas is $B = -V dp / dV$.

Die Zusammenhänge sind definiert über: $p = -\kappa \frac{\delta V}{V}$

Um die Sache etwas zu verkürzen: Die Schallgeschwindigkeit $v = \sqrt{\kappa / \text{Dichte}}$
 $v^2 = (\kappa / \text{Dichte})$, die Dichte von Luft ist temperaturabhängig, 1m^3 bei $20^\circ\text{C} = \sim 1,2\text{ kg}$.
 κ muß folglich eine Zahl sein wo am Ende $v \sim 343\text{ m/Sekunde}$ bei $\sim 20^\circ\text{C}$ herauskommt.

Es gibt eine „adiabatische“ Konstante γ , diese beträgt für trockene Luft bei $20^\circ\text{C} \sim 1,4$
 Der atmosphärische Druck beträgt $\sim 101.000\text{ Pascal}$ * dieser Konstante $\gamma 1,4 = \kappa 141.400$

Wie Druckvariationen Partikeldisplacement hervorrufen:



Newton, 2. Gesetz: Kraft $F = \text{Masse } M \cdot \text{Beschleunigung } a$; aber auch Kraft $F = \text{Druck } p \cdot \text{Fläche } A$
 Kraft und Beschleunigung sind vektorielle Größen, d.h. sie haben eine Richtung in die sie wirken.
 Der momentane absolute Druck bei x_1 ist Atmosphärendruck p_{Atm} + Differenzdruck p_1 ,
 der absolute Druck wirkt auf die Fläche A bei x_1 und verursacht eine Kraft $F = p_1 \cdot A$ nach \rightarrow

Bei x_2 mit momentan absolutem Druck $(p_{\text{Atm}} + p_2)$ wirkt die Kraft $F = p_2 \cdot A$ nach links

Die resultierende Netto-Kraft F (Vektor) nach rechts \rightarrow ist daher $(p_1 - p_2) \cdot A$

Nimmt man für die Funktion $f(y)$ als durchschnittliche Auslenkung, die 1. Ableitung $= f'(y) =$ mittlere Geschwindigkeit, und die 2. Ableitung nach der Zeit $=$ Beschleunigung, so ist die Beschleunigung in Richtung \rightarrow rechts:

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{2. Ableitung nach der Zeit ergibt momentane Beschleunigung} = a \text{ in m/Sek}^2$$

Wenn man die genannten Formeln zusammenfasst, immer in Hinblick, daß diese Annäherungen an nicht lineare Funktionen sind und so nur nahe der jeweiligen Limes Bestand haben können, so ergibt sich näherungsweise anhand Fehlerfortpflanzung:

$$(p_1 - p_2)A = \rho A(x_2 - x_1) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \leadsto \quad \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} = -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \leadsto \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$dp \cdot A = \text{Dichte} \cdot \text{Vol.} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} \quad \rightarrow \quad dp/dx = -\text{Dichte} \cdot \text{Beschleunigung}$

Das Zeichen ρ für Dichte ist leider in Formeln oft sehr schwierig von $p =$ Druck zu unterscheiden!

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad p = -\kappa \frac{\partial y}{\partial x}$$

Druckgradient $= -\text{Dichte} \cdot \text{Beschleunigung}$ wird gleichgestellt mit Wecheldruck $\cdot -\kappa \cdot$ Steigung
 Volumen und Dichte verhalten sich entgegengesetzt proportional, steigt das Volumen durch Auslenkung, so sinkt die Dichte durch Auslenkung = die Masse wird geringer.
 Druckdifferenz = Auslenkung dp muss sehr klein bleiben, dx muß sehr klein sein.

Energieerhaltung:

Potentielle Energie

+ kinetische (Bewegungs-) Energie

TL

= 1,0

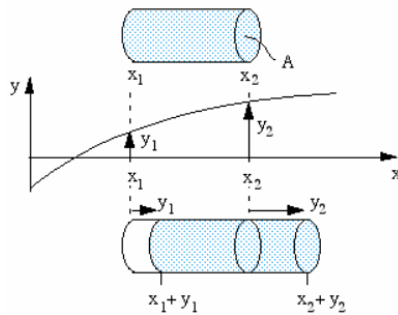
$$\frac{1}{2} * m * v^2$$

geänderter Druck $dp \rightarrow$ Kraft pro Fläche = geänderte Masse * Beschleunigung

steigt der Druck mehr pot. Energie = weniger kinetische Energie

= 1,0

Verluste = Umwandlung in andere Energieformen ist hier noch nicht berücksichtigt.

Kompression / De-Kompression: Wie Partikeldisplacement den Druck beeinflusst:let bei $x_1 = 0, y_1 = 1, x_2 = 4, y_2 = 6$ Betrachten wir die Bewegung eines Elements, dessen Position zwischen x_1 und x_2 liegt.

Die Abstände von x_1 zu x_2 sind viel geringer als eine Wellenlänge und letztlich sollen diese den Limes bilden. Auf der Grafik ist die longitudinale Auslenkung an der x Achse nach rechts, nochmals grafisch auf einer y -Achse aufgetragen. Wir betrachten jetzt das ganze Volumen dieses Elements.

$f(y)$ ist zu jeder Betrachtungszeit die durchschnittliche „bulk“ (als Ganzes betrachtet) Auslenkung, über der die individuellen Moleküle ihre eigene „random“ Motion / Bewegung vollziehen.

Das „ungestörte“ Volumen des Elements beträgt $V = A * (x_2 - x_1)$ A = Querschnittfläche
die Masse beträgt $m = \rho V = \rho * A * (x_2 - x_1)$

zu einer bestimmten Zeit sind die Moleküle von ihrer Ruhelage x_1 nach y_1 ausgelenkt,
zu einer bestimmten Zeit sind die Moleküle von ihrer Ruhelage x_2 nach y_2 ausgelenkt.

Das neue Volumen des Elements ist nun

$$V + dV = A * (x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$$

$$dV = A * (y_2 - y_1)$$

in diesem Fall würde das Volumen größer, es muß der Druck im Element kleiner werden,
beim Limit, wenn $x_2 - x_1$ sehr klein ist, liefert es allerdings als Näherung

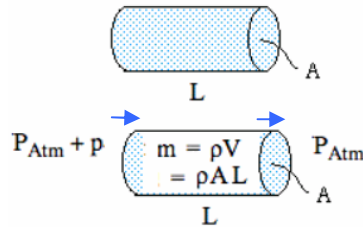
$$p = -\kappa \frac{\delta V}{V} \quad \text{Näherung} = \quad p = -\kappa \frac{\partial y}{\partial x}$$

Die tatsächliche räumliche Auslenkung von Molekülen muß also noch sehr viel kleiner sein.

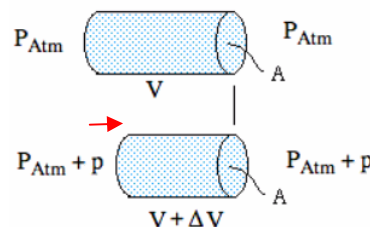
Acoustic Compliance = geschlossene Cavity = Höhle / Federkraft (*Enlargement, tank*):

Hier ein kurzer Luft-Zylinder innerhalb eines Rohres, Länge $L \ll$ betrachtete Wellenlängen.

Nun wird er durch einwirkenden Druck komprimiert, stellen wir uns einen Zylinder vor, der an der rechten Seite verschlossen ist, links wird Druck angewendet, dieser komprimiert das Volumen mit einer oszillierenden Auslenkung – hier nur links $y = y_m \cdot \cos \omega t$ (rechte Grafik), im momentanen Schnappschuss der Skizze ist p **positiv** and ΔV negativ.



Inertance ~ Druckunterschiede, Bewegung, Trägheit



Compliance ~ Kompression, Ausdehnung, Steifigkeit

Über die Zeit hinweg wird das Volumen fortlaufend verändert (größer und kleiner):

$$\Delta V = y_m \cos \omega t = (\Delta V)_m \cos \omega t.$$

Der Volumenfluss U in das Volumen ist $-\partial V / \partial t$, so

$$U = -\partial / \partial t (\Delta V)_m \cos \omega t = \omega (\Delta V)_m \sin \omega t \quad (1. \text{ Ableitung} = +\sin)$$

Wieviel Druck ist für eine Volumenänderung ΔV erforderlich? Die Antwort ist kompliziert, denn wenn ein Gas komprimiert wird erhöht sich seine Temperatur, dehnt es sich auch, dann kühlt es ab. Wenn es aber so schnell komprimiert wird, daß nicht genügend Zeit bleibt um die Wärme abzuleiten, andererseits wird es ja auch gleich rasch dekomprimiert, geht man davon aus daß es sich ~adiabatisch verhält.

Es gibt einen adiabatischen Faktor γ der hier angewendet wird und dieser beträgt für Luft ~ 1,4.

$$p = -\gamma * P * \Delta V / V$$

Hier ist die Volumendifferenz $(\Delta V)_m \cos \omega t / V$. Der Druck bei Equilibrium ist atmosphärischer Druck P_A . Die fraktionale Druckänderung ist

$$p_m / P_A = -\gamma (\Delta V)_m \cos \omega t / V \quad \text{so} \quad p_m = -\gamma P_A (\Delta V)_m \cos \omega t / V$$

Man stellt fest, daß der Druck (**minus cos** Funktion) 90° hinter dem Fluss (**sin** Funktion) nacheilt.

Diese Phasendifferenz beim Bestimmen des Faktor $Z = \Delta p / U$ **muß berücksichtigt werden**.

Die Magnitude (der Betrag) von ZC ist daher

$$ZC = \Delta p / U = \text{magnitude of } (-\gamma P_A (\Delta V)_m \cos \omega t / V) / (\omega (\Delta V)_m \sin \omega t) = \gamma * P_A / \omega * V$$

Die akustische Compliance (Kapazitätivität) C ist $C = V / \gamma P_A$

$$ZC = \gamma P_A / \omega V = 1 / \omega C \quad ZC = j \gamma P_A / \omega V = \gamma P_A / j \omega V = 1 / -j \omega C$$

und hat eine negative Phase von -90° , Druck folgt Fluss -90° =ein negativer Phasenwinkel ϕ (Druck-Fluss).

Der Fluss muß eine Weile andauern bevor der Druck steigt, daher muß der Druck dem Fluß nacheilen.

Im gezeigten Beispiel und Zeitmoment fließt Gas ein und erhöht den Druck. ZC verhält sich ist in diesem Zustand invers proportional zu ω , Schwingungen bei höherer Frequenz hätten eine kürzere Schwingungsdauer (Periode), dadurch ist der Betrag des Gases welches einströmt (in einer $1/2$ Periode) geringer und so wird weniger Druck generiert. Die „gefangene“ Luft agiert wie eine mechanische Feder (Volumen eines Helmholtz Resonators, ~ Mundstückkessel).

Blechblasinstrumente: Max. -90° dominant im Bereich zwischen Impedanz Maxima zu nächst höherem Impedanz Minimum = rechte abfallende Peakflanken, Mundstück: abfallende Flanke Popp. Frequenz)

Acoustic Inertance = Trägheit (Masse u. Beschleunigung, kurzer offener Zyl., Constr.):

Hier ist der Druck notwendig, weil die beschleunigte Luft Masse hat. Darum ist Z auch proportional zu ω , eine höhere Frequenz erforderte größere Beschleunigung und damit größeren akustischen Wechseldruck. Eine Impedanz, wo der **Druck dem Fluß um 90 Grad voraus** wird als inertierte Impedanz bezeichnet. (max. dominant im Bereich Impedanz Minima zu nächst höherem Impedanz Peak =aufsteigende Flanken)

Als Gedächtnisstütze: Man muß Druck für eine Weile anwenden, damit die Beschleunigung einen Fluß erzeugt. Inertanz ist die induktive Komponente, die mit Masse, Beschleunigung und Trägheit erklärt wird.

Es wird wieder die Idee einer sehr kleinen "kompakten Region" verfolgt, dessen Dimensionen viel kleiner sind als die Wellenlängen die wir erwarten. Als Konsequenz sind die Variationen in Phase in dieser Region klein und der momentane Druck ist (annähernd) einheitlich.

Situation eines kurzen „Luft-Zylinders“ mit Fläche A und Länge $L \ll$ Wellenlänge in einem Rohr:
Die Luft im Zylinder schwingt aufgrund einer erzeugten akustischen Druckdifferenz p über der Länge mit $y = y_m \cos \omega t$ und in x -> Richtung ist seine momentane Beschleunigung

$$a = \partial^2 y / \partial t^2 = -\omega^2 y_m \cos \omega t \quad 2. \text{ Ableitung nach der Zeit}$$

Durch die Definition Dichte : $\rho = \text{Masse/Volumen}$,

ist die Luftmasse des Zylinders $\rho * V = \rho * A * L$

Die Nettokraft in Pascal ergibt sich aus Druck * Fläche = $p * A$.

Newton's second law ($F = ma$) ergibt (2.Ableitung nach Zeit) $A = \text{hier immer Fläche gemeint}$

$$F = p * A = \rho * L * A * (-\omega^2 y_m \cos \omega t) = -\omega^2 \rho * L * A * y_m \cos \omega t = -(p_m \cos \omega t) A$$

Es sollte gerade gezeigt werden, daß die Magnitude des akustischen Drucks, der notwendig ist, die oben beschriebene Beschleunigung zu erzeugen, $p_m = \omega^2 \rho * L * y_m$

Beachten: hier fehlt bereits die Fläche A, da Kraft und Masse mit der Fläche A proportional skalieren.

Dieser „kompakte“ Luftzylinder bewegt sich mit den enthaltenen Partikeln vor und zurück.

Um den Volumenfluß U zu erhalten, wird die Partikel Velocity u mit der Fläche A multipliziert:

$$U = A * u = A \partial y / \partial t = -A * y_m * \omega * \sin \omega t \quad u = 1. \text{ Ableitung nach der Zeit } dy/dt$$

was zeigt, daß Druck p und Volumenfluß U +90° out of phase = phasenverschoben sind.

Die -cos Funktion ist der -sin Funktion um +90° voraus, -cos hat bei Zeit t=0 ein Maximum, während -sin dieses Maximum erst eine 1/4 Wellenlänge = 90° oder pi/2 später durchlaufen wird.

Soll die Impedanz ZI = das Verhältnis von p / U definiert werden, so muß diese Phasendifferenz mit berücksichtigt werden. Die Magnitude (der Betrag) von ZI ist daher:

$$ZI = p/U = \omega^2 \rho * L * y_m / \omega * y_m * A = \omega * \rho * L / A \quad \text{komplexe Notation: } ZI = j \omega * \rho * L / A$$

und hat eine positive Phase von +90 Grad, der Druck eilt dem Fluss voraus. Die Phasendifferenz ergibt einen positiven Winkel phi (Druck-Fluss). Der Öffnungshals bei Helmholtz-Resonator (Mundstück: ~ Seele und teilweise Backbore), **Blechblasinstrumente: Maximal dominant an den aufsteigenden linken Peakflanken, Mundstück unterhalb der MPC Popp. Frequenz dominant.**

komplexe Fluss Impedanz = Reibungswiderstand + Federwiderstand + induktiver Widerstand
 $ZR = \text{Reibungswiderstand}^2 + (ZC = +\text{kapazitiver Widerstand} + -ZI \text{ induktiver Widerstand})^2 = Z_{ges}^2$

Heben sich kapazitiver + induktiver Widerstand auf, wird der (ohmsche) Reibungswiderstand real.
 $\phi = 0 + \phi \text{ Druck} - \phi \text{ Fluss}$

Akustische Radiation Impedanz Zrad (Strahlungswiderstand):

Am Ende eines offenen Rohres haben wir gesehen, das Druckwellen 180 Grad gedreht und reflektiert werden sollten, unter der Annahme daß ausserhalb des Rohres der Druck dem atmosphärischen Druck entspricht, was bedeutet das der akustische Wechsel-Druck in diesem Raum nicht variieren würde. Die Impedanz wäre ausserhalb des Rohres schlagartig wesentlich kleiner. Aber wir wissen es passiert: Es wird etwas Schall aus der Röhre abgestrahlt. Auch wenn der akustische Druck außerhalb des Rohres sehr klein ist, so ist er nicht Null.

William Strutt (auch bekannt als Lord Rayleigh) hat dafür eine analytische Lösung präsentiert:

Radiation von einem Kreiskolben (Membran) in einer unendlich großen Wand (viel größer als die Wellenlänge). Ist der Kreiskolben (Piston/Membran) mit einem Radius gleich dem Rohrdurchmesser, so ist die Querschnittfläche gleichzeitig die Austrittsfläche, $S = \pi \cdot r^2$.

Dieser Kreiskolben soll mit einer Amplitude A und der aktuellen Frequenz ω mitschwingen \leftrightarrow , mit Respekt zu der großen Wand und Frequenz soll seine (veränderliche) Position $x = A \cdot \sin(\omega t)$ sein.

Der akustische Fluss über der Fläche des Kreiskolbens (Querschnittfläche * Partikelgeschwindigkeit) ist $U = S \cdot v = \omega \cdot S \cdot A \cdot \cos(\omega t)$.

Wobei A ja bereits durch $\sin(\omega t)$ variiert. Der Druck p auf der Fläche des Kreiskolbens sollte sich anhand der Radiation Impedanz Z_{rad} des Abstrahlungsfeldes ergeben. Wir sollten annehmen, daß die hauptsächliche Ursache für diesen Druck (die Trägheit) jene Luftteile beisteuern, die sehr nahe am dem Kolben ist. Wenn auch weiter entfernte Luftteile gleichzeitig verschoben und etwas komprimiert/verdünnt werden, so muß sich die Luft die sich gerade sehr nahe vor diesem Kolben befindet dennoch mit dem Kolben mitbewegen.

Man nimmt ein Volumen Luft mit Dichte ρ , Fläche S und einer Länge eL und es soll über seine Trägheit (Intertia) dann annähernd der Wert von Z_{rad} bestimmt werden. Die notwendige Kraft dieses Volumen zu bewegen ist:

$$\begin{aligned} \text{Kraft } F &= \text{Masse} \quad * \text{Beschleunigung} \\ &= \rho \cdot S \cdot eL \quad * (\text{Differenz Volumen} / \text{Differenz Zeit}) \\ &= \rho \cdot S \cdot eL \quad * (-\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t)) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \\ \\ 2. \text{ Ableitung nach der Zeit} \end{array}$$

Aber anhand der Definition Druck = Kraft * Fläche hat die Radiation Impedanz eine Magnitude von

$$Z_{rad} = p / U = \omega \cdot \rho \cdot eL / S$$

und die Phase von Z_{rad} ist + 90 Grad: Der abgestrahlte Druck ist dem Fluss +90° voraus.

Für einen solchen Kolbenstrahler in der unendlich großen Wand stellt sich heraus, daß eL den Wert von $\sim 0,85 \cdot \text{Radius}$ annimmt. (Warum und näheres dazu siehe Google).

Dieser Kolbenstrahler kann als Annäherung an den Fluss am offenen Ende dargestellt werden. Es sollte einer Inertanz (= Trägheit eines beidseits offenen Luftpropfens) gleichkommen, der am offenen Ende mitschwingt.

Nun sitzen die meisten Rohre nicht in einer unendlichen Wand, das Rohr ist meist auch dünnwandig. Hier wurden Werte von $eL \sim 0,61 \cdot \text{Radius}$ (Levine/Schwinger) festgestellt. Diese sind auch als notwendige Endkorrektur zum Bestimmen der effektiven Resonanzfrequenz bekannt.

Für Frequenzen, für die eL viel kleiner als deren Wellenlänge ist verhalten sich Rohre annähernd als ideal offene Rohre, aber die Radiation = Trägheit gibt ihnen eine extra akustisch wirksame Länge: eL . (Eigenschaften kurzer, offener Zylinder = Inertia)

Reflektion an einem offenen Ende:

Am Ende eines offenen Rohres müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Druck am Rohrende muß gleich dem Druck ausserhalb sein.
2. Der Fluss aus dem offenen Rohr muß gleich dem Fluss sein der abgestrahlt wird
3. Zchar. des Rohres ist viel größer als Zrad aussen, dh.

wird der Fluss gleichgesetzt, dann kann der Druck nicht gleich sein, es kommt zu einer Reflektion.
 \rightarrow =vorlaufend, \leftarrow =rücklaufend

$$\begin{aligned} P_{\rightarrow} + P_{\leftarrow} &= P_{\text{rad}} > \text{ und } U_{\rightarrow} - U_{\leftarrow} &= U_{\text{rad}} > \\ p_{\rightarrow} / Z_c - p_{\leftarrow} / Z_c &= P_{\text{rad}} / Z_{\text{rad}} \end{aligned}$$

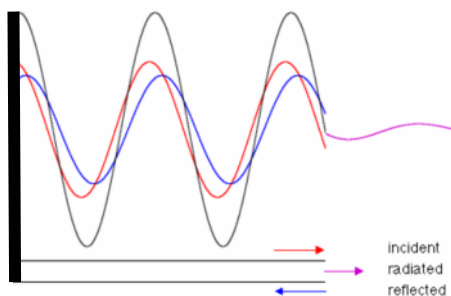
Daraus folgt der Reflektionsfaktor: $p_{\leftarrow} / p_{\rightarrow}$

$$= (Z_{\text{rad}} - Z_{\text{char}}) / (Z_{\text{rad}} + Z_{\text{char}}) = - (1 - Z_{\text{rad}} / Z_{\text{char}}) / (1 + Z_{\text{rad}} / Z_{\text{char}})$$

Der Reflektionsfaktor ist eine komplexe Größe und Zrad ist beinahe vollständig imaginär, das bedeutet es wird der Großteil reflektiert.

Mit Ausnahme sehr hoher Frequenzen ist Zrad \ll viel kleiner als Zchar, daher ist der Reflektionsfaktor beinahe -1,0 und es kommt zu Reflektion mit einer Phasenänderung $\pi = 180$ Grad beim Druck p_{\leftarrow} , aber keiner Phasenänderung im Fluss U_{\leftarrow} .

Das ergibt einen Druckknoten - (2 Wellen $\sim \pi$) out of Phase addieren sich zu annähernd Null, (Druck), und einen Flußbauch \rightarrow 2 Wellen \sim in Phase addieren sich auf ein Maximum.



Druck am offenen Ende, Reflektion und Abstrahlung mit einem Phasenversatz (hier oberhalb max. Resonanz)

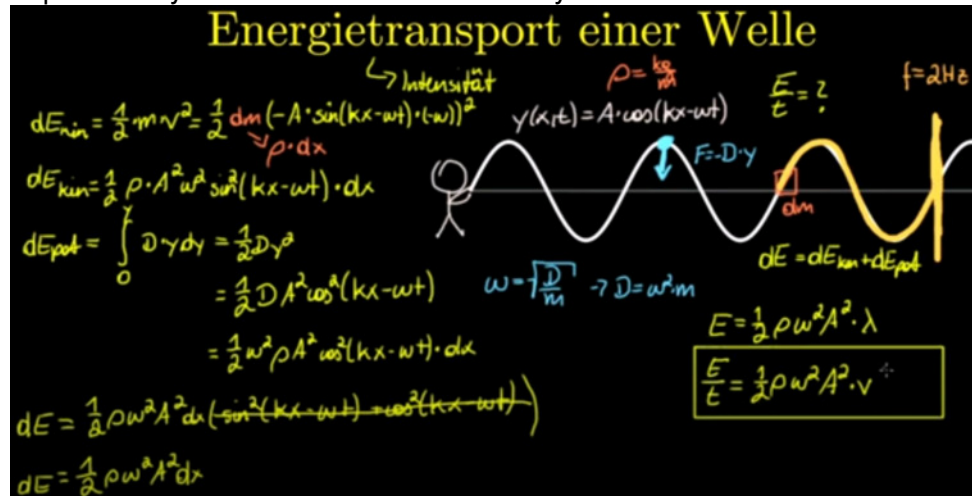
Reflektion an einem geschlossenen Ende:

An einem geschlossenen Zylinderende ist die Reflektion etwas weniger umständlich:
 Wenn das Rohr ideal geschlossen ist, dann muß der Fluss U_{\leftarrow} und U_{\rightarrow} sich zu Null addieren = Flussknoten, das bedeutet hier ist der Fluss $U_{\rightarrow} = U_{\leftarrow}$ um π (180 Grad) phasenversetzt, die Druckwellen sind dagegen in Phase und addieren sich zu einem Druckbauch (Pressure Antinode).

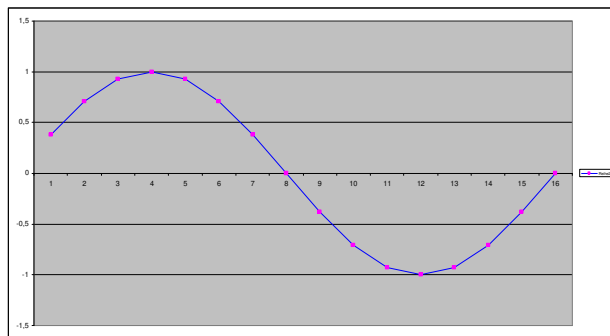
Quelle: <https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/compliance-inertance-impedance.htm#C>

Energie einer wandernden harmonischen Welle

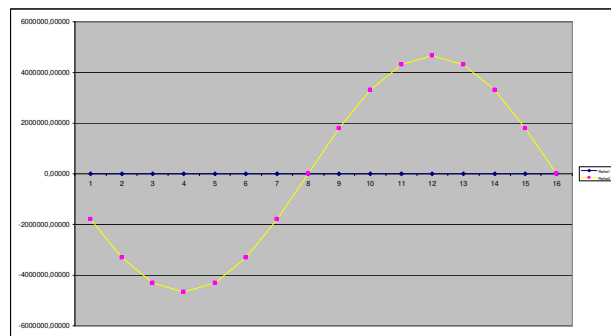
<https://www.youtube.com/watch?v=cMWdy5IPXUI>



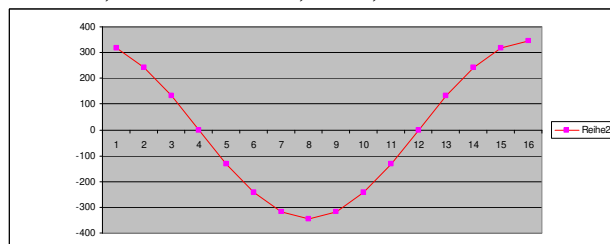
Die Rückstellkraft $F: -D \cdot y$ ist dafür verantwortlich, daß potentielle Energie in der Welle transportiert wird, $v =$ hier die Steigung der Kurve = Kreisfrequenz ω wenn $f(x,t) = 0$



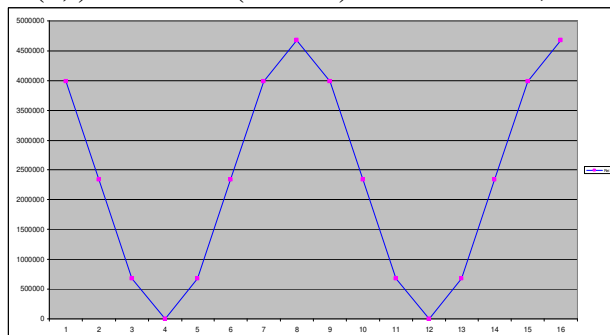
$f(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$ mit $t = 1/4$ Periode, $WL = 1m$, $c = 344m/Sek.$, $A = 1,0$



$f''(x,t) = -A \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \omega^2 =$
Beschleunigung $a=0$ wo Velocity=max. $= \omega$



$f'(x,t) = -A \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \omega$ $v = A \cdot \omega$; am Peak die Kreisfrequenz $\rightarrow 1/2\pi = v$ in Hz.



$(-A \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \omega)^2$ --> dieser Wert $\cdot 1/2 \cdot$ Masse wäre die kinetische Energie
Man erkennt, das an Stellen maximaler Partikel-Auslenkung die kinetische Energie 0 ergibt, hier ist dafür die entgegengesetzte potentielle Energie (Druckdifferenz) maximal.

Formel-Sammlung Zylinder:

Laufende Schallwellen in einem unendlich langen Zylinder (keine Reflektion, stehende Wellen, etc.)

$C = \text{Crest} = \text{Amplituden Maximum}$, $A = \text{Querschnittsfläche}$ *closed-infinite Länge.*

$$P(x, t) = C^+ e^{j(\omega t - kx)}$$

Druckverlauf Zylinder vorlaufende Welle C^+ --> mit $-kx$ (Ort)

$$P(x, t) = C^+ * \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung: Ort/Wellenlänge (k) = Faktor * Zeit / Frequenz

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{A} \frac{\partial u}{\partial t}$$

1. Ableitung k = -Faktor * Particle Velocity

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

2. Ableitung k^2 = $[1/c^2]$ * ω^2

Für die obige Druckwelle, die in eine Richtung (nach rechts) läuft ist der assoziierte Volumenfluss

$$U(x, t) = \left(\frac{A}{\rho c} \right) C^+ e^{j(\omega t - kx)}$$

Flussverlauf Zylinder - vorlaufende Welle C^+ ->

hier ist die stetige Winkeländerung daher $-kx$

$$U(x, t) = (A/\rho c) * C^+ * \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) \quad (A/\rho c) = (1/Z_c)$$

$$Z_c = \frac{P(x, t)}{U(x, t)} = \frac{\rho c}{A}$$

charakteristische Impedanz Z_c , real mit 0 Imaginärteil.

siehe: bei $U = 1/Z_c * \text{Druckverlauf}$

Druck und Fluss Komponenten sind in Phase zu einander, die pure resistive Wave Impedanz = der reale Widerstand gegen Wellenausbreitung Verhältnis bzw. Faktor in Beziehung, es gibt keinen Roundtrip, keine rücklaufenden Wellen.

Schallwellen in einem Zylinder (endlicher Länge), = vor- und rücklaufende Wellenzüge (Reflektionen)

closed <-> open

$$P(x, t) = [C^+ e^{-jkx} + C^- e^{jkx}] e^{j\omega t}$$

Druckverlauf Crest vor und zurück

1. + überlagern sich und 2. **180° Phasendrehung**

Achtung! $e^{-jkx} = \sin(-kx) = -\sin(kx)$; 2. Teil/Ort nicht $\sin(kx)$; $\omega t \rightarrow$ Ausbreitungsrichtung

komplex konjugiert $\underline{z}^* = r * e^{-j\varphi} = \underline{r}$ nur der j-Wert = Phase wird an der x-Achse gespiegelt

$$P(x, t) = [C^+ * \cos(kx) + i \sin(kx) + C^- * \cos(kx) + i \sin(kx)] * [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$$

reale cosinus Werte addieren sich auf max 2-fachen Wert, imaginäre sinus Werte drehen sich um 180°.

$$U(x, t) = \left(\frac{A}{\rho c} \right) [C^+ e^{-jkx} - C^- e^{jkx}] e^{j\omega t}$$

$$= \frac{1}{Z_c} [C^+ e^{-jkx} - C^- e^{jkx}] e^{j\omega t}$$

Flussverlauf Crest vor- und zurücklaufend

hier - werden abgezogen

Volumenfluss = Partikelgeschwindigkeit * Querschnittsfläche:

$$U(x, t) = 1/Z_c * [C^+ * \cos(kx) + i \sin(kx) - C^- * \cos(kx) + i \sin(kx)] * [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$$

kx = Ort steht in der Klammer, kx einmal -, einmal + (vor+rücklaufend), Zeit immer $+\omega t \rightarrow$ Ausbreitung
reale Teile löschen sich aus, $(-\sin(kx) - (+\sin(kx)) * (+\sin(\omega t)) = -1+1=0 = -\sin = \text{keine Drehung!}$

Zu jedem Zeitpunkt t und Position x sind Druck und Volumenfluss in folgendem Verhältnis:

$$P = P^+ + P^- \quad U = U^+ + U^- \quad = \text{Überlagerung mit rücklaufender Welle, C max. Faktor 2,0}$$

$$P^+ = Z_c U^+ \quad P^- = -Z_c U^- \quad P^+ = (\rho c/S) * U^+ \quad \text{bzw.} \quad P^- = -(\rho c/S) * U^-$$

Wandernde Wellen werden frequenzabhängig an einer Discontinuity = geänderte Impedanz teilweise reflektiert und teilweise abgestrahlt.

x_0 = links, x_L = Ende (Discontinuity), Z_L = bei Rohrende $x=L$, C^+ = Crests = Amplituden

Transmission Abstrahlung – Faktor =

$$\frac{P(L,t)}{C^+} = e^{-jkL} \left[\frac{2Z_L}{Z_L + Z_c} \right] e^{j\omega t}$$

nur ankommende --> C^+ können abgestrahlt werden
 $-jkl$ = von links kommend, Phase gespiegelt

Die Impedanz Z_L (am Ort L = offenes Ende) charakterisiert Radiation und/oder Reflektion am Ende des Rohres, vorerst mit simplen Annäherungsversuchen:

Reflektionsfaktor =

$$\frac{C^-}{C^+} = e^{-2jkL} \left[\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \right]$$

zurücklaufend / vorlaufend = Reflektierter Faktor immer $< 1,0$
 Faktor 2 = vorlaufend + retour (Roundtrip)

Wäre $Z_L = Z_c$, wäre das **Bracket = 0**, wäre es kein Ende sondern ein Ort x im Rohr, keine Reflektion.

Geschlossenes Ende bei x_L : Z_L wäre \sim unendlich, und das **Bracket** oben immer $\sim +1$.

Pressure travelling Waves werden von der rigiden Barriere **ohne** Phasendrehung (*** +1**) reflektiert.

Ideal offenes Ende bei x_L : (low freq. Waves): $Z_L \sim 0$ ergibt im **Bracket** oben immer $= -1$ ($-Z_c/+Z_c$)

Pressure-travelling waves werden **um 180 Grad gedreht (* -1) und** reflektiert;

Hier wäre keine Transmission vom ursprünglichen Druck in das „andere Medium“.

Das andere „Medium“ = Luft im Raum = (riesengroßes Rohr) hat eine plötzlich völlig geringere Z_c !

Die Eingangsimpedanz am geschlossenen Eingang bei $x=0$ ergibt sich aus:

$$\text{Im idealisierten closed-open Rohr mit } Z_L = 0 \quad Z_{in} = jZ_c \tan(kL)$$

Das bedeutet 180 Grad Phasenwechsel bei jenen Frequenzen, wo $kL = k$, $\rightarrow L=1$ = Druckknoten am offenen Ende. Die Impedanzmagnitude wäre real, unendlich groß, mit 0 Imaginär-Anteil, = Phasenänderung 0 Grad. Dieser Zustand tritt immer bei $\pi/2 = 1,57 \text{ rad} = 90 \text{ Grad}$ bzw. $1/4 \text{ WL}$ u. ungeradzahlig Vielfachen davon auf. Eine Impedanzkurve bekommt man mit dieser Formel aber nicht.

Der vorerst vollständige Weg (noch immer ohne Berücksichtigung von Verlusten) am ideal offenen Ende
= maximale Reflektion von Druckwellen.

$$\frac{p_a(L)}{U_a(L)} = \left[-\frac{\rho c}{S} \right] \cdot \frac{p_0 e^{ikL} + p_1 e^{-ikL}}{p_0 e^{ikL} - p_1 e^{-ikL}} = Z_L$$

Abschlußwiderstand $-Z_L$ bzw. $-Z$ (bei $x=1 \cdot L$) warum – ist noch nicht klar..(Blickrichtung in das Rohr?)

$Z_x=L=Z_L$ open end = Realteil r Druck / r Fluss * $\cos(kL) \rightarrow \sim 0$
Imaginärteil r Druck / r Fluss * $\sin(kL) \rightarrow 0-1$ (0 bei Antiresonanzen)

Betrag Druck Z_L Z Druck = Wurzel (0^2+0^2) = 0 wenn als ideal offen betrachtet

Betrag Fluss Z_L Z Fluss = Wurzel ($0^2+\sin^2$) = Sinuswerte, **die nur noch positiv sind**. ≥ 0 bis +1

Daraus kann man nach der Literatur auf folgende Formeln kommen:

$$Z_c = \frac{P(x,t)}{U(x,t)} = \frac{\rho c}{A} \quad Z_{in,cyl} = \frac{\rho c}{S} \cdot \frac{Z_L \cos(kL) + i \frac{\rho c}{S} \sin(kL)}{i Z_L \sin(kL) + \frac{\rho c}{S} \cos(kL)}$$

$$Z_{in} = \left(\frac{\rho c}{S} \right) * \frac{Z_L * \cos(kL) + j \left(\frac{\rho c}{S} \right) * \sin(kL)}{\left(\frac{\rho c}{S} \right) * \cos(kL) + j Z_L * \sin(kL)} \rightarrow Z_L \text{ steht nicht vor der kompl. Zahl!}$$

$$Z_{in} = Z_c * \frac{\text{Re: } (Z_L * \cos(kL) \sim 0) + \text{Im: } Z_c * \sin(kL)}{\text{Re: } Z_c * \cos(kL) + \text{Im: } (Z_L * \sin(kL) \sim 0)} \quad (-\rightarrow z1 = P/Z_c) \quad (-\rightarrow z2 = Z_c/U)$$

$Z_L \sim 0$ bedeutet... **z1:** Realteil nahe 0, **IM ist der Druck!** **z1** Betrag stammt aus IM Anteil, sin Funktion!
z2: Realteil ist der Fluss, IM nahe 0 **z2** Betrag stammt aus RE Anteil, cos Funktion!

A bzw. S = Querschnittfläche, Achtung: $z1$ und $z2$ sind keine Impedanzen, sondern Komponenten davon!

$Z_{in}=p/U$ ($x=0$, frequenzabhängig) = $C_{vor} + C_{zurück}$ / $vor - zurück$ = größer oder kleiner 1,0 * Z_c .

der Nenner ist immer größer 1 mal $Z_c = Z_{in}$, bedarf aber der Kenntnis von Z_L , diese wird hier bei

Resonanz mit $=0 = \cos(kx-\omega t) = 0$ angenommen, Radiation Imp. und Reibungsverluste nicht berücksichtigt...

Das bei Resonanzfrequenzen der imaginäre Anteil verschwindet, geht nicht gleich aus der Formel hervor, eigentlich steigt der imaginäre Anteil des Druckes, beim Verhältnis Druck:Fluss, stimmt es dann aber.

Durch den Bruch p/U wird das imag. Druckpotential real und das reale Flusspotential imaginär!

Der **Betrag** $|Z|$ wird durch Pythagoras ermittelt; **Hypotenuse**= r =**Zeigerlänge**= $|Z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$
jeweils einzeln für $z1$ und für $z2$

(Multiplikation wäre: $z1 * z2 = r1 * r2 * e^{i(\varphi1+\varphi2)}$)

Division: $z1 / z2 = r1 / r2 * e^{i(\varphi1-\varphi2)}$

Division ergibt komplex Z : $\rightarrow r1/r2 * \cos(\varphi1-\varphi2) + i r1/r2 * \sin(\varphi1-\varphi2)$

IM/RE gibt \tan von Z , \arctan (IM/RE) liefert die Phasendifferenz von Druck zu Fluss = $(\varphi1-\varphi2)$.

Zeigerlänge = Betrag $|Z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2}$

Realteil = $\cos(\varphi) \rightarrow$ Faktor von max +1,0 * $z = \text{Realanteil} / \text{Zeigerlänge}^{**}$

Imaginärteil = $\sin(\varphi) \rightarrow$ Faktor von max +1,0 * $z = \text{Imag.AnTeil} / \text{Zeigerlänge}^{**}$

Steigung = tangens = Imag.Teil / Realteil

Winkel (φ) $Z = \arctan(\tan(\text{IM/RE}))$ im Bogenmass = Phasendifferenz Druck zu Fluss.

**** die beiden Längenfaktoren RE+IM stimmen, jedoch stimmen die Vorzeichen teilweise nicht!**

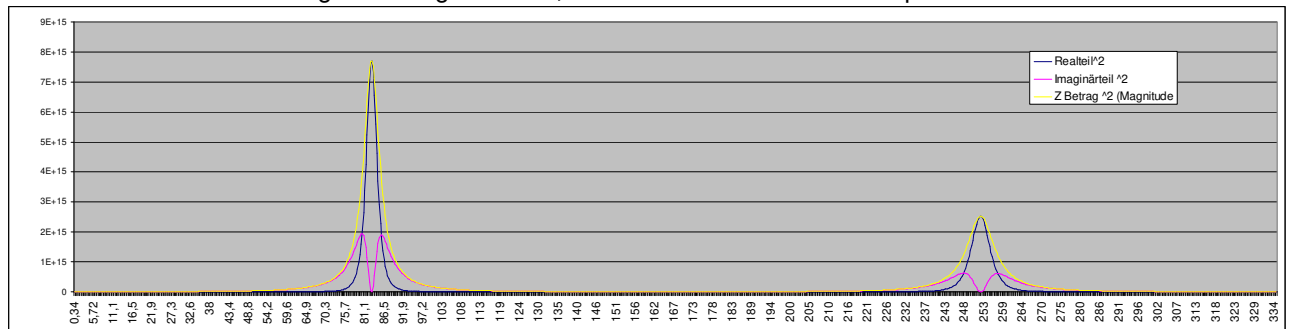
$\varphi1-\varphi2 = \arctan(\text{Im} / \text{Re}) =$ Druck: $0/0$ = nicht definiert, \rightarrow immer wenn das passiert = ± 90 Grad!
Fluss: -1 bis $+1/0$ = Fehler! $\rightarrow -,-$ $\varphi1-2 = \pm \pi/2$

Es ergibt sich also das Problem mit Divisionen durch Null. Glücklicherweise gibt es Verluste durch Reibung und Abstrahlung, es kommt in der Praxis nie zu diesen Zuständen, ein kleiner Wert für $Z_L < 0,0001$ reicht!

Perturbations on a Bb Trumpet – Notices & Results, ©Hermann Preisl, www.preisl.at/brassissima/

Fluss Impedanz am Eingang eines geschlossenen Zylinders

Die wundersame Wandlung des Imaginärteiles, wenn er mit sich selbst multipliziert wird:



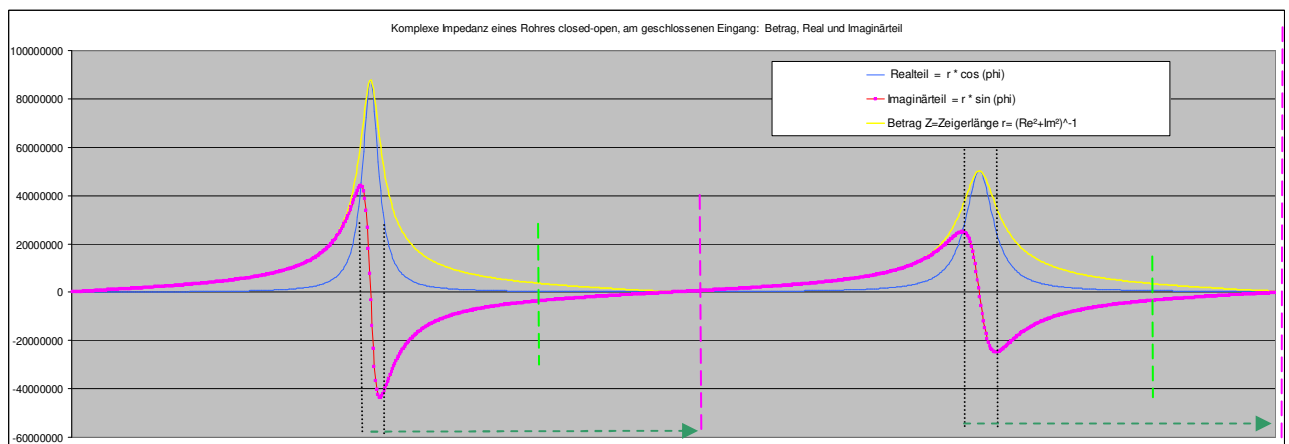
Grafiken: Zylinder closed-open, Länge 1m, Durchmesser 11mm, Raumtemperatur, 0 Hz – 2. Antiresonanz.

Der Z Betrag² = Zeiger² = Magnitude² bildet sich aus (Realteil² + Imaginärteil²)

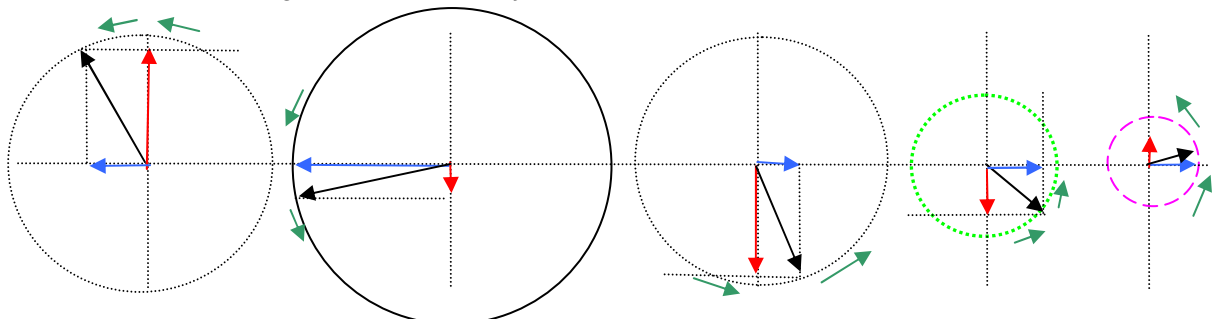
Eine negative Zahl * eine negative Zahl gibt eine positive Zahl! Alle Beträge sind nun positiv, hier sieht man, was das bei Imaginärteil bedeutet: Wir sehen den Betrag² des Imaginäranteiles, dieser wird zum Betrag² des Realteiles aufaddiert, das gibt den Betrag² der Impedanz. Er wird somit ein realer Bestandteil der Impedanzmagnitude.

Im² nimmt eine durchaus überraschende Form an. Zieht man die Wurzel daraus, bleiben die Zahlen positiv. Eine Wurzel hat immer zwei Lösungen: eine positive Zahl und eine negative Zahl.

Um den tatsächlichen Imaginärwert zu erhalten muß man eine Bedingung einbauen, z.B. er soll negativ sein: Wenn Steigung des Zeigers >=0; Wurzel(Imaginärteil²); sonst -Wurzel(Imaginärteil²)!



blau= Realteil, rot= Imaginärteil; Schema jeweils kurz nach den auftretenden Extremzuständen.



+i vor Imp Max

Druck läuft vor

0i bei Imp Max

-i nach Imp Max.

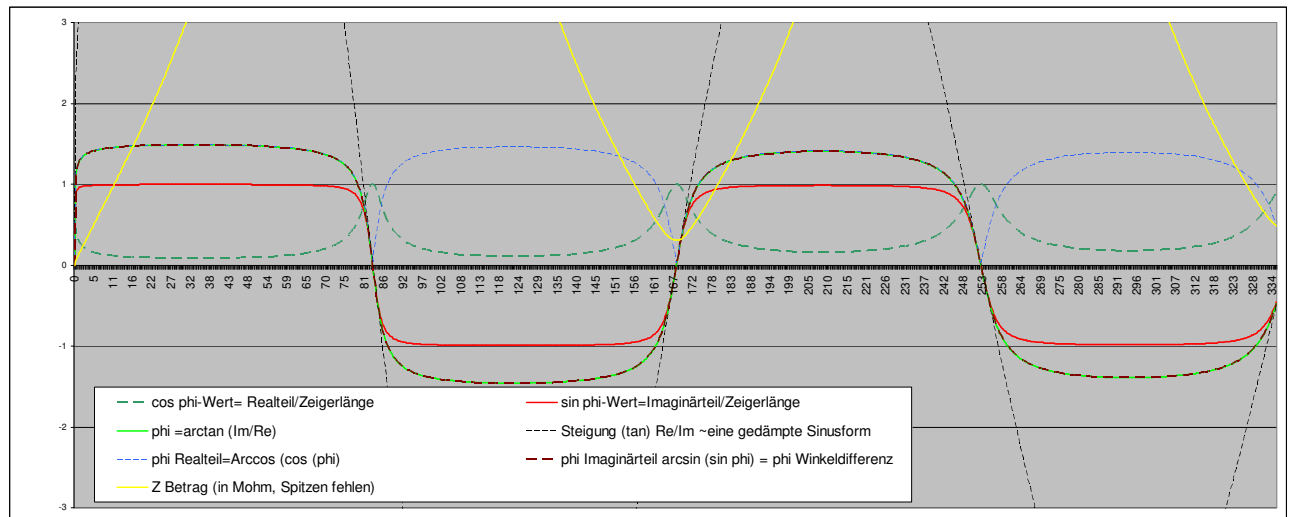
Druck läuft nach

-i ->

0i bei Imp. Min.

Die Zeigerlänge $|r|$ von p/U ändert sich laufend, daher auch der Radius des Einheitskreises=Amplitude; Bei Impedanzminima (hier 167 Hz) beträgt der Realteil $\cos(0)=1$, dies allerdings mit der Amplitude nahe 0 multipliziert ergibt ebenfalls wieder nach Null. An den Polpunkten ist die Steigung und Winkel ϕ jeweils 0.

Desto geringer die Dämpfung ist = ausgeprägtere Resonanzkurve, umso rascher herrscht ein Ungleichgewicht der Blind-Anteile der Impedanz um die Polstellen herum. Vergleich Peak1 mit Peak2.



tangens (phi) = Imaginärteil/Realteil

sin (phi) Wert = Imaginärteil/Zeigerlänge

cos (phi) Wert = Realteil /Zeigerlänge

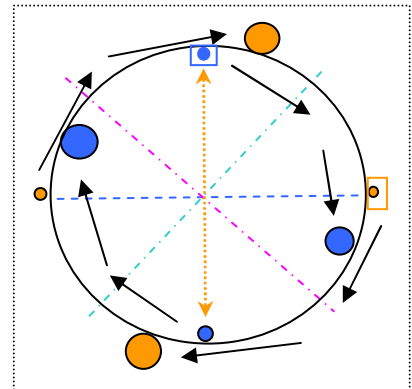
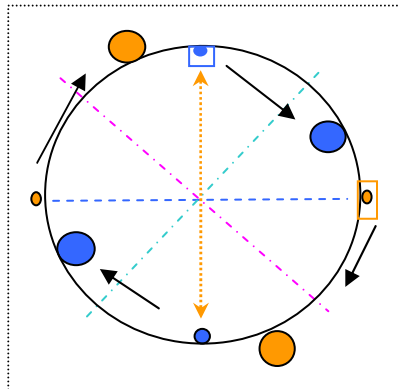
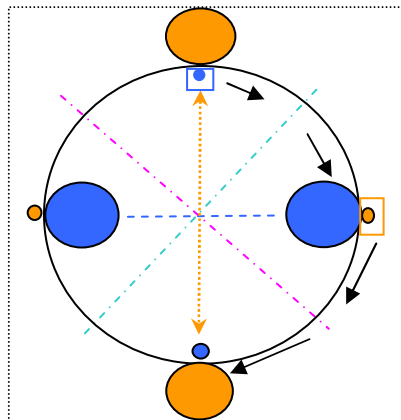
allerdings wie man bemerkt nur als positive Werte (Realteil ist auch nur positiv).

arctan liefert den Winkel phi = arctan von tan(phi).

arcsin liefert den Winkel phi = arcsin von sin(phi).

arccos liefert den Winkel phi = arccos von cos(phi),

Alles nur imaginär? Wie kommt es zu $|Z| = \text{Druck/Fluss}$ mit $\phi=0$ bei Max. und Min.?:



↔ Real: Druckmax. Druckknoten –Druckmax; ↑↓ Imaginär: Fluss-Max. - Flussknoten-Fluss-Max.

A: Situation bei Maxima, Minima B: aufsteigende linke Peak Flanke C: abfallende rechte Peak Flanke

Die strichlierten Linien zeigen jeweils $1/8$ eines Kreises = Schwingungslänge.

Innerhalb des Kreises: Druck (blau Druck Bäuche +Knoten), die Größe deutet ein Potential an
 Ausserhalb des Kreises: Fluss (orange, Bäuche +Knoten), die Größe deutet ein Potential an, und auch ein Verhältnis von Realteil zu Imaginärteil: **Ein Knoten = Re 0 und IM ± 1 , =rein imaginär!**

Der Druckzustand muß per Definition am offenen Ende immer ein Druck-Knoten (bleiben) $= 0i+1$

Wir rechnen daher die Druckverlaufskurve vom Ende zum geschlossenen Beginn $= +1+i0$.

Folglich muß sich mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit = Frequenz der Endwert bei $L0$ ändern.
 Jeder $1/4$ Kreisabschnitt entspricht $1/4$ Wellenlänge, da $1 \text{ WL} = 1 \times \text{Kreisumrundung}$.

Verdoppelte Geschwindigkeit = doppelte Strecke = $1/4 \times 2$ wird $1/2$ Kreisumrundung = $1/2 \text{ WL}$.

Vierfache Geschwindigkeit = $1/4 \times 4 = 1$ Kreisumrundung, die Umdrehungsrichtung ist bei dieser Betrachtung egal. Druckbäuche und Flussbäuche bilden $2 \times$ pro Schwingung + und - Maxima.

Bei $0/8$ von $\pi^2 = 0 = DC$ ist der Beginn bei $\text{Re}0, \text{Im}+1$ hier mit einem blauen Knoten markiert.

Dieser Ausgangspunkt (offenes Ende mit Druck $\pm 0 = \text{Pressure Node}$ bleibt fix!

Nach $1/8$ von $\pi^2 = 0,78$ ~die Mitte einer aufsteigenden Input Impedanz Flanke...zu Mode #1

Nach $2/8$ von $\pi^2 = 1,57$.. ergibt sich Resonanzmode 1 (Druckbauch Max.+, blau)

Nach $3/8$ von $\pi^2 = 2,36$.. ~die Mitte einer abfallenden Input Impedanz Flanke..

Nach $4/8$ von $\pi^2 = 3,14$.. Impedanz Minima #1 (Druckknoten blau) $= 0 i-1$

Nach $5/8$ von $\pi^2 = 3,92$.. ~die Mitte einer aufsteigenden Input Impedanz Flanke...zu Mode #2

Nach $6/8$ von $\pi^2 = 4,7$.. ergibt sich Resonanzmode 2 (Druckbauch Max. +, blau) $= -1 i0$

nach $7/8$ von $\pi^2 = 5,4$.. ~die Mitte einer abfallenden Input Impedanz Flanke..

nach $8/8$ von $\pi^2 = 6,28$.. Impedanz Minima #2. (blau) =Anfang vom Ende = Neubeginn, usw.

Gleichzeitig werden die 4 Phasen einer Schwingung von Mode #1 dargestellt:

Beginn Phase 1 bei $t=0$ Druckknoten, $0 i+1$ Beginn Phase 2= Überdruck, $+1 i0$

Beginn Phase 3 bei $t=T/2$ = Druckknoten, $0 i-1$ Beginn Phase 4= Unterdruck $-1 i0$

Flussknoten sind per Definition am geschlossenen Ende und bleiben hier (orange) = dh. wir haben 2 Berechnungs-Richtungen der Sinus-Wellenfunktion:

Druck vom offenen Ende, Fixknoten $= 0 \rightarrow$ zum geschlossenen Ende (Druck wird hier variieren),

Fluss vom geschlossenen Ende Fixknoten $= 0 \rightarrow$ zum offenen Ende (Fluss wird hier variieren).

Flussknoten starten dort, wo der Druck im Idealfall = Resonanz aufhören sollte: Druckbauch: $\pm 1 i0$

Beide Komponenten haben jeweils einen realen Anteil und einen imaginären Anteil, dieser ändert sich mit der Frequenz (Wellenlänge).

Betrachten wir Frequenzen in der Nähe von Resonanz Mode #1 = $\frac{1}{4}$ Wellenlänge = $\frac{1}{4}$ Periode: Entspricht die Frequenz $\sim \frac{1}{4}$ Wellenlänge des Rohres ändert sich das Verhältnis der Beträge von Real- und Imaginäranteil stark. Der Volumenfluss, den wir hier als die imaginäre Größe betrachten verschwindet durchgangsweise. Das ist somit bei allen Maxima der Fall: Das Verhältnis Druck/Fluss wird hier rein real, da Fluss = 0.

Bei Minima ist es umgekehrt: Druckkomponente wird rein imaginär, Flusskomponente rein real. Nicht komplex ausgedrückt würde man sagen Minima = Druckknoten, Maxima = Druckbauch.

Ist die Frequenz etwas geringer als die Frequenz mit maximalem realen Druckanteil, dann ist diese auf der linken aufsteigenden Peakflanke. (Beispielgrafik B).

Der Druck hat noch einen positiven imaginären Anteil, der reale Anteil ist (noch) nicht maximal. Der Fluss hat noch einen positiven realen Anteil, der imaginäre Anteil ist noch nicht maximal.

Ist die Frequenz etwas höher als die Frequenz mit maximalem realen Druckanteil, dann ist diese auf der rechten abfallenden Peakflanke. (Beispielgrafik C).

Der Druck hat schon einen negativen imaginären Anteil, der reale Anteil ist nicht (mehr) maximal. Der Fluss hat schon einen negativen realen Anteil, der imaginäre Anteil ist nicht mehr max.

Vervollständigt man das Gesamtbild systematisch, so ergeben sich von DC 0Hz bis Peak Mode #2 folgende komplexe Zahlenpaare für Z_{in} am Einheitskreis in kartesischen Koordinaten:

| | DC 0Hz | 1/8WL | 1/4WL | 3/8WL | 2/4WL | 5/8 WL | 3/4 WL |
|----------|---------|--------------|----------|---------------|--------|--------------|----------|
| | Z-Min.0 | linke Flanke | Z-Max.#1 | rechte Flanke | Z-min. | linke Flanke | Z-Max.#2 |
| Druck Re | 0 | >0 | +1 | < +1 | 0 | < 0 | -1 |
| Druck Im | +1 | <+1 | 0 | < 0 | -1 | > -1 | 0 |
| Fluss Re | +1 | <+1 | 0 | < 0 | -1 | > -1 | 0 |
| Fluss Im | 0 | < 0 | -1 | > -1 | 0 | > 0 | +1 |

Bei $\frac{1}{4}$ WL = Z-Max#1 wissen wir, hier ist viel Druck und viel Realanteil gegenüber 0 Imaginäranteil im Spiel ist. Betrachten wir die Zahlenschaar nochmals, stellen wir fest, ja das ist auch so, Fluss und Druck sind zueinander nochmals um den Betrag +/-1 gedreht, die Rechnung sollte passen.

Doch wir unterliegen einem Rechenfehler, da: Realteil = cos(phi) Imaginärteil = sin(phi)
 Cos(0) = Realteil +1 Cos(pi/2) = Realteil 0, Cos(pi) = Realteil -1, Cos(pi/2*3) = Realteil 0
 Sin(0) = Imag.Teil 0 Sin(pi/2) = Imag.Teil +1 Sin(pi) = Realteil 0, Sin(pi/2*3) = Imag.Teil -1

Wir haben bisher bereits die Division von Druck p / Volumen-Fluss $U = \frac{z_1}{z_2} = Z$ betrachtet. Tatsächlich sind p = „z₁“, und U = „z₂“, komplexe Zahlen, Komponenten aber keine Impedanzen! Erst durch den Bruch p/U = Z wird imag. Druckpotential real, Flusspotential ist bereits real!

jeder Z-Wert besteht aus 2 komplexen Zahlenpaaren, Z-Max. #1 als Beispiel besteht aus

$$\begin{aligned} \text{Druck } z_1 &= RE \cos(\phi=1,57) = 0 \text{ und } IM \sin(\phi=1,57) = 1 & |z_1| &= \sqrt{re^2+im^2} = 1 \\ \text{Fluss } z_2 &= RE \cos(\phi=1,57) = 0 \text{ und } IM \sin(\phi=1,57) = 1 & |z_2| &= \sqrt{re^2+im^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Realteil} = |Z| * \cos(\phi_1 - \phi_2 = 0) = 1 \quad \text{und} \quad \text{Imaginärteil} = |Z| * \sin(\phi_1 - \phi_2 = 0) = 0$$

Es folgt somit der Tatsache, daß Druckschwankungen ohne jeden Volumenfluss in der Realität nicht vorkommen können, ein völlig von Fluss losgelöster Druck = z₁ nur ein „imaginärer“ sein kann, und ein Volumenfluss ohne jegliche Druckschwankungen = z₂ physikalisch ebenfalls nicht möglich ist und somit ebenfalls nur eine „imaginäre“ Größe ist!

Es gibt **nur einen Winkel phi**, $\arctan(\tan)$, $\arccos(\cos)$ und $\arcsin(\sin)$ liefern diesen. Der Winkel beschreibt den Phasenversatz zweier Wellen mit **selber Frequenz**. Um diesen Winkel, üblicherweise im Bogenmass angegeben sind die 2 Wellen gegeneinander in ihrer Phase (z.B. Nulldurchgang, oder + Max, oder –Max.) verschoben. Genauso könnte man eine Zeitdifferenz (in ms) oder Ortsdifferenz als Phasenversatz heranziehen. Ob dieser positiv oder negativ ist, hängt letztendlich von der **Referenz** Welle oder Funktion ab, die man gewählt hat. Hier ist üblicherweise der Fluss die Referenz, der Druck eilt dem Fluss vor +phi, ist phasengleich $\phi=0$, oder der Druck eilt nach -phi. Das ist der Winkel phi von Z.

Wir setzen per Definition als Referenz für Zin: Druck über = gegen(über) Fluss $Z=p/U$:
 Druck = max. Realanteil Z wo $\phi = 1/4$ Periode bzw. Wellenlänge und ungerade Vielfache davon.
 Gibt Fluss= max. Imaginärteil Z wo $\phi=0$ und $+2/4$ Perioden und Vielfache davon =Flussknoten.

Das bedeutet, Nodes sind die Punkte wo der Realteil verschwindet, die Größe wird rein imaginär. Antinodes dagegen haben ein Maximum wo der Imaginärteil verschwindet, die Größe wird real.

Im Einheitskreis mit Radius=1 ergibt sich daher für den Bruch $p/U=Z$ in kartesischen Koordinaten:

| | DC 0Hz | 1/8WL | 1/4WL | 3/8WL | 2/4WL | 5/8 WL | 3/4 WL |
|-----------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|
| | Z-Min.0 | linke Flanke | Z-Max.#1 | rechte Flanke | Z-min. | linke Flanke | Z-Max.#2 |
| Druck RE | +1 | >0 | +1 | >0 | +1 | > 0 | +1 |
| Fluss IM | 0 | <+1 | 0 | <-1 | 0 | <+1 | 0 |

Je nach Frequenz max. 90 Grad zu einander versetzt, das entspricht dem Winkel der imaginären Achse und gibt 0 Grad Phasendifferenz alle $1/4$ Wellenlängen = bei Peaks und Antiresonanzen.

Ein komplexer, als auch realer Widerstand =Z-Betrag kann nie negativ werden, Realteile von $|Z|$ der Magnitude sind daher immer positiv.

Abweichende Frequenzen (auf- und absteigende Peakflanken) haben eine Differenz = reaktiver Blindanteil aus Trägheit und Federsteifigkeit am Widerstand, Imaginäranteile stehen für diesen Blindanteil und fallen positiv aus – an aufsteigenden Peakflanken, negativ an abfallenden Flanken und ergeben sich aus dem Winkel phi, dem Phasenversatz von Druck gegenüber Fluss.

Die |Z| Beträge der Funktionen Druck $F(\omega/\pi)$ und Fluss $F(\omega/\pi)$ über Frequenz:

Oft werden „äquivalente Längen“ eines Zylinders verwendet um die Abweichungen davon zu beschreiben. Manchmal ist das ein closed-open Zylinder, manchmal ein open-open Zylinder.

Funktion $f(\omega/\pi)$ von z_1 = Druck: $\sqrt{(\sin(k \cdot (\text{effektive Rohrlänge in m})))^2}$

In einem closed-open Zylinder ist die gesuchte Funktion z_1 von Druck über der Frequenz ω
= Frequenz * 2π = Kreisfrequenz Omega ω = Rohrlänge + Endkorrektur + Verluste.

$2\pi = 1$ Kreisumrundung = 1 Periode T , = 1 ganze Schwingung entspricht dabei einer Frequenz von (Schallgeschwindigkeit c / Rohrlänge + eL), $\omega = 2\pi \cdot \text{Frequenz}$, $\omega/c = k = \text{phi}$ $\varphi = 2\pi$, $\sin(2\pi) = 0$.

Es gibt $4 \cdot \frac{1}{2}$ Roundtrips (Phasenabschnitte), in den closed-open Zyl + Endkorr. passen $\frac{1}{4}$ Wellenlängen als maximale Resonanz, wechselnd gefolgt von max. Antiresonanz, Resonanz, usw, und allen Zwischenstadien.

1 Wellenlänge = 1 Periode = 2π ist daher die Wellenlänge $4 \cdot \frac{1}{4}$ WL der 2. Antiresonanz.
 Frequenz = Schallgeschwindigkeit/Wellenlänge, bzw. 1/Periode = Zeitdauer 1 Schwingung.
 Bei einem 1m Rohr mit Schallgeschwindigkeit = $344 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ / $1 \text{ m} = 344 \text{ Hz} = 2\pi = 6,28 \text{ rad.}$

Der Winkel φ phi = Kreisfrequenz von Druck ist also Phasengeschwindigkeit/effektive Rohrlänge, gibt: $2 \cdot \pi = 1$ ganze Wellenlänge, 1 Wellenlänge = φ phi = 6,28..

| | | | | |
|--------------------|-----------------|----------------|-------------------------|----------------|
| $\frac{1}{4}$ WL = | 1. Resonanz ist | = Frequenz der | 2. Antiresonanz / 4 * 1 | phi=1,57.. |
| $\frac{2}{4}$ WL = | 1. Antiresonanz | = Frequenz der | 2. Antiresonanz / 4 * 2 | phi=pi |
| $\frac{3}{4}$ WL = | 2. Resonanz | = Frequenz der | 2. Antiresonanz / 4 * 3 | phi=4,71.. |
| $\frac{4}{4}$ WL = | 2. Antiresonanz | = Frequenz der | 2. Antiresonanz / 4 * 4 | phi= 2pi, usw. |

Das ergibt eine Funktionskurve von z_1 Druck $F(\omega/\pi)$ mit $\sin(\text{phi } 0) = 0$ bei DC = 0 Hz.
 $\sin(\pi/2 \cdot 1) = +1$ bei 1. Druckmaximum (Druckbauch), $\sin(\pi/2 \cdot 2) = 0$ bei 1. Minima (Druckknoten),
 $\sin(\pi/2 \cdot 3) = -1$ bei 2. Druckmaximum (Druckbauch), $\sin(\pi/2 \cdot 4) = 0$ bei 2. Minima (Druckknoten),
 etc. Der jeweilige Winkel ist ergibt die Kreiswellenzahl $k = \omega/c$, $k \cdot c = \omega = \omega/\pi = \text{Frequenz in Hz}$.

Funktion $f(\omega/\pi)$ von z_2 = Volumenfluss: $\sqrt{(\cos(k \cdot (\text{effektive Rohrlänge in m})))^2}$

Beim Fluss ändert sich überraschend wenig. Die Frequenz der gesuchten Funktion ist dieselbe, per Definition eilt Druck dem Fluss bei ansteigenden Peak Flanken jeweils voraus, bei abfallenden rechten Flanken dem Fluss nach. **Je nachdem ob wir Druck in Phase 1 von 4 oder Phase 3 von 4 betrachten ändern sich die Vorzeichen bei $Z \cdot x=L$, da die Werte aber periodisch ablaufen und bei |Z| das Quadrat gebildet wird spielt das Vorzeichen keine Rolle mehr – alles wird positiv :)**
 Einschwingvorgänge +/- können in der stationär betrachteten Situation nicht mehr verfolgt werden!

Volumenfluss = Schallschnelle * Querschnittfläche ist im max. Resonanzfall und im max. Antiresonanzfall jeweils um +/- 90 Grad zu der Druckfunktion versetzt. Wir suchen daher eine Funktion, die gegenüber der Druckfunktion um $-\pi/2$ verschoben ist:

In einem closed-open Zylinder ist die gesuchte Funktion z_2 = Volumenfluss über der Frequenz
= $-\cos(k \cdot \text{eff. Rohrlänge in m})$

Wir haben also beim Fluss U den Realteil einer komplexen Zahl, bei Druck p den Imaginärteil.

Letztendlich bleibt nur ein Versatz +/- Druck zu Fluss übrig sofern wir Sin und Cos gegenrechnen, ein frequenzabhängiger Phasenwinkel Druck-Fluss.
 Dieser Versatz wirkt sich aber auf die Positionen von Druckknoten und Flussknoten aus!

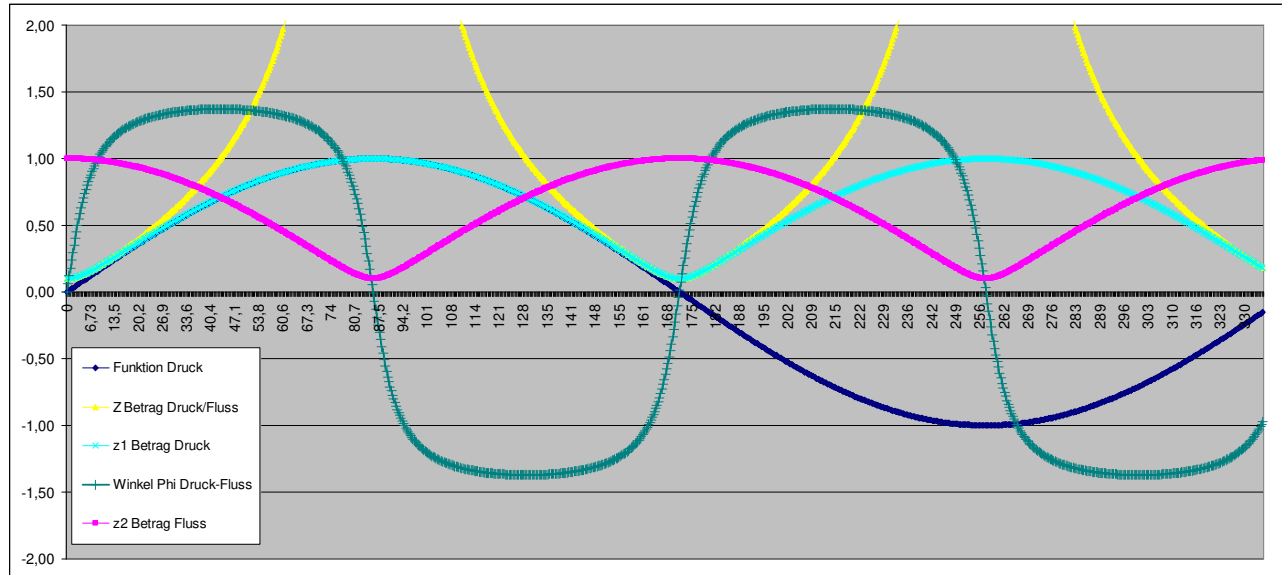
Z = Druck/Fluss, die komplexe Division und Metamorphose der Potentiale p und U:

$$Z_{in} = Z_c \cdot \frac{\text{Re: } (ZL \cdot \cos(kL) \sim 0) + \text{Im: } Z_c \cdot \sin(kL)}{\text{Re: } Z_c \cdot \cos(kL) + \text{Im: } (ZL \cdot \sin(kL) \sim 0)} \quad (-> z1 = p/Z_c)$$

$$(-> z2 = Z_c/U)$$

Ich bezeichne p als komplexe Druckkomponente = $z1$,
und den Volumenfluss U als komplexe Flusskomponente = $z2$, $Z = z1/z2 = p/U$.

$$\underline{Z} = Z_c \cdot \underline{ZL} \cdot \underline{z1} \quad (= \text{Druck Realteil} + \text{Imaginärteil}) / Z_c \cdot \underline{ZL} \cdot \underline{z2} \quad (= \text{Fluss Realteil} + \text{Imaginärteil})$$



Es wird der Bereich bis zum 2. Minima bei ~344 Hz $\sim 1 \cdot WL$ betrachtet, Rohr closed-open, Länge 1m.

Z_c als Skalierungsfaktor wurde nicht berücksichtigt, für ZL wurde hier 0,1 verwendet, jeweils für eine bessere Sichtbarmachung der Effekte. ZL hebt die Minima und senkt die Peak Maxima ab, macht Polsprünge „runder“ und bedeutet, daß etwas Energie abgestrahlt, weniger reflektiert wird.

$z1$ Betrag (ist der tatsächliche Druck), der Zähler im Bruch = Zeiger setzt sich zusammen aus:

$$z1 = \sqrt{\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2} = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \quad \text{wobei der Realteil einen Wert nahe 0 hat,}$$

$z1$ oberhalb des Bruches ($p/U = z1/z2$) ist also ohne Bruch beinahe rein imaginär

$z1$ ist daher eine Sinus Funktion $f(\omega/\pi)$ über der Frequenz = Imaginärteil = $\sin(\phi)$

Bei $z2$ (Fluss), dem Nenner im Bruch muß sich folgende Funktion ergeben:

$z2$ Betrag (ist der tatsächliche Fluss) = Zeiger, und setzt sich zusammen aus:

$$z2 = \sqrt{\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2} = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \quad \text{wobei der Imaginärteil Werte nahe 0 hat,}$$

$z2$ unterhalb des Bruches ($= p/U = z1/z2$) ist also ohne Bruch beinahe rein real

$z2$ ist daher eine Cosinus Funktion $f(\omega/\pi)$ über der Frequenz = Realteil = $\cos(\phi)$

Durch die Division komplexer Zahlen $z1/z2$ passiert folgende Umwandlung:

Die Zeigerlängen werden dividiert $z1/z2$, resultierender $|Z|$ wird demnach groß wo $z1$ groß ist.

Der ermittelte Winkel $z2$ wird subtrahiert: $(\phi_1 z1 - \phi_2 z2) = \text{neuer Winkel } \phi Z$.

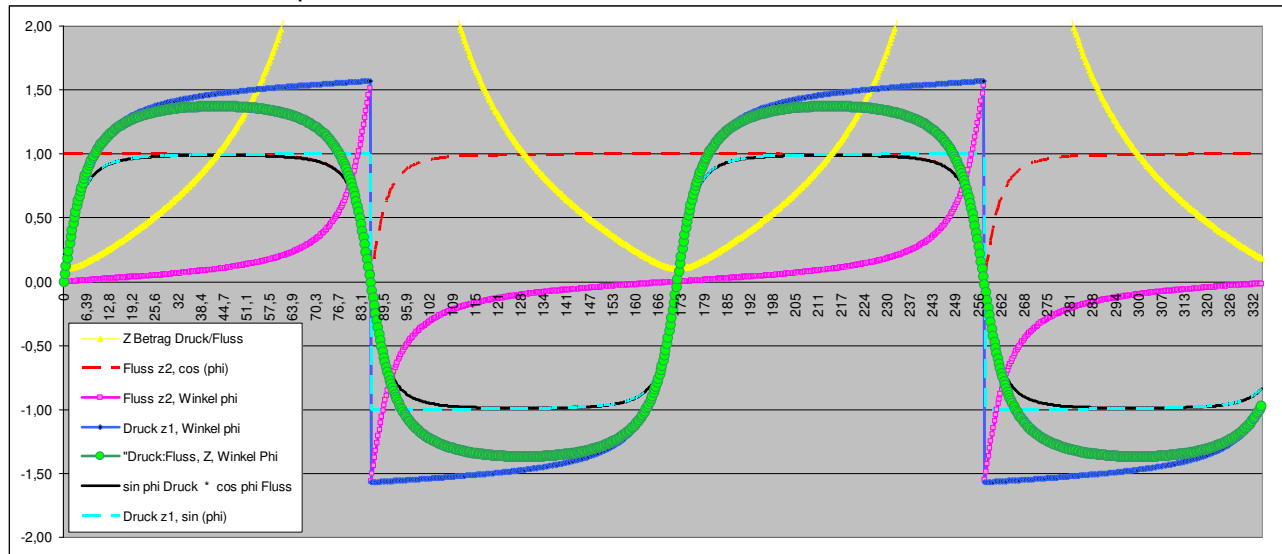
Daraus können nun wieder Realteil = $Z \cdot \cos(\phi Z)$ und Imaginärteil = $Z \cdot \sin(\phi Z)$

errechnet werden. Und wie man sieht ist die Druckkomponente nun im Realteil, die Flußkomponente im Imaginärteil. Beinahe rein imaginäre Werte durch eine beinahe rein reale Werte dividiert ergeben also einen solchen Umwandlungseffekt! Real \leftrightarrow Imaginär!

Eine Division beinahe realer Werte durch beinahe imaginäre Werte ergibt diesen Umwandlungseffekt nicht, siehe Transmission Matrix Methode (TMM)!

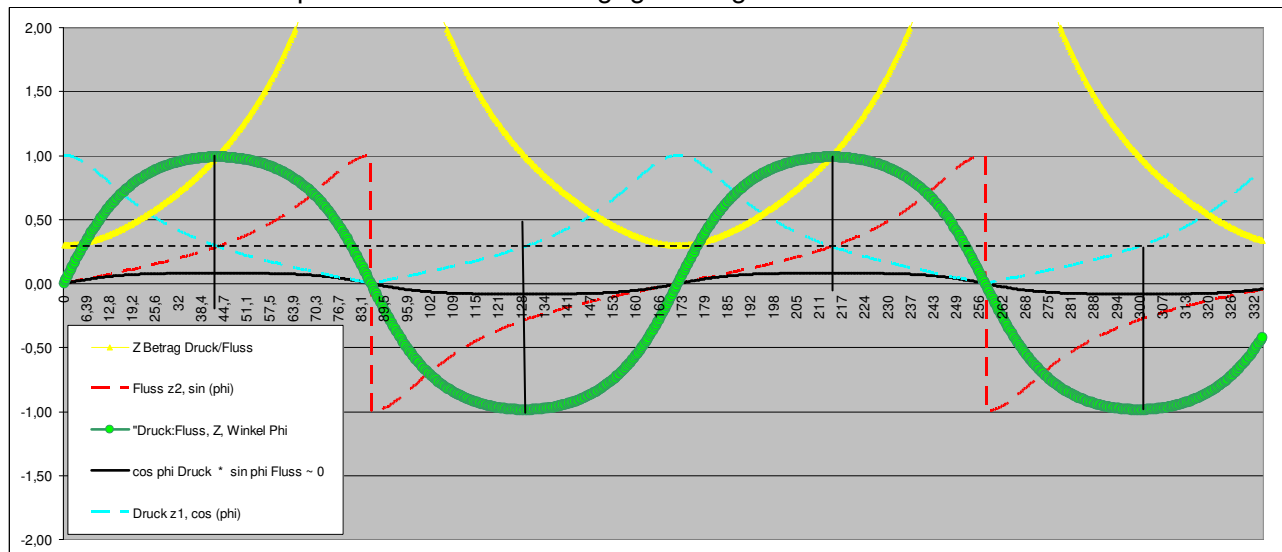
Die komplexen Einzelkomponenten Druck z_1 und Fluss z_2 und deren Verhältnis $Z = z_1/z_2$:

Diese Anteile der Komponenten summieren sich auf:



$\sin(\phi)$ von $z_1 = \text{Druck} \cdot \cos(\phi)$ von $z_2 = \text{Fluss}$ $\approx \sim \text{Imaginärteil } Z / |Z|$
 ist $\text{Imaginärteil Druck} \cdot \text{Realteil Fluss}$, Abweichungen durch Z_L , Z_L hier = 0,1

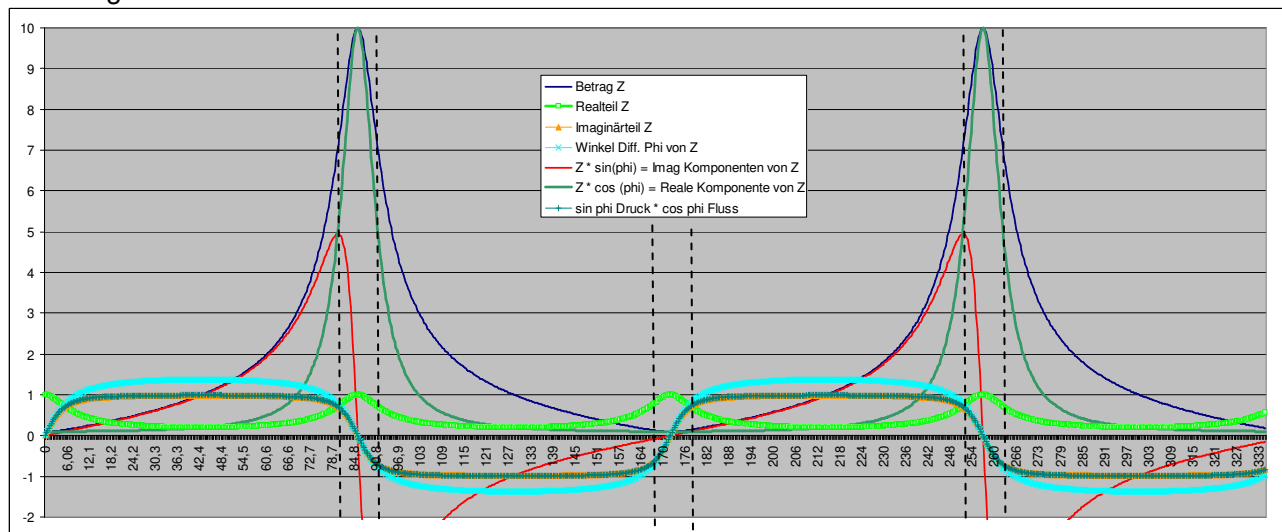
Diese Anteile der Komponenten löschen sich gegenseitig beinahe aus:



$\cos(\phi)$ von $Z_1 = \text{Druck} \cdot \sin(\phi)$ von $Z_2 = \text{Fluss} = \sim 0$ = heben sich auf
 = $\text{Realteil Druck} \cdot \text{Imaginärteil Fluss} \sim 0$, aber prinzipiell eine Sin Funktion
 Abweichungen durch Z_L , Z_L hier = 0,3 damit die Abweichung von 0 sichtbar wird.

Schnittpunkte sind auf Magnitudenhöhe = Z_L , Minima $\rightarrow 0 + Z_L$, Vielfache von
 Grundschiwingung + $1/8$ WL im Abstand von je $1/4$ Wellenlänge = die Frequenz der Wiederholung ist
 im Vergleich zu Resonanz- und Antiresonanzfrequenzen doppelt so hoch mit $1/8$ Wellenlänge
 Versatz, in selber Richtung und Frequenz wie die Phasenwinkeldifferenz.

Z als Ergebnis der Division $z1/z2$:



Wir sehen hier viele generelle Zusammenhänge,
die y-Achse wird als Faktor betrachtet, Z Beträge y/10:

Der Realteil ist max. 1,0 der Imaginärteil ist max. +/-1,0

Kann man den Winkel Phi anhand des Zeigers (Z-Betrages) errechnen?

Bei einem Z Betrag von: Wurzel aus $1/4 = 0,5$ * Zeiger Z, sind Imaginärteil² und Realteil² jeweils zu 50% beteiligt, =Kräftegleichheit von Druck und Fluss., das sollte eine Steigung $f'(w/\pi)$ von +/-1 zu +/- 1 ergeben, = 45 Grad +/-;

$$\text{Druck} = \text{Realteil} = \cos \text{ von } (\pi/4 = 0,78539...) = \frac{0,7071..}{\sqrt{2}} = 0,5$$

$$\text{Fluss} = \text{Imaginärteil} = \sin \text{ von } (\pi/4 = 0,78539..) = \frac{0,7071..}{\sqrt{2}} = 0,5 \quad = 1,0 \text{ TL.}$$

Es gelingt aus dem Betrag Z den Betrag des Realanteils an Z und somit phi zu errechnen, sofern die zugrunde liegende Funktion eine harmonische Schwingung ist. Der Real Anteil ist schlichtweg das Quadrat aus den normalisierten Z Beträgen, zusätzlich einer kleinen Modifikation.

Dieser kann wie folgt ermittelt werden, bei realen Messungen und unterschiedlichen Peakhöhen muß das aber pro Peak- Hälfte (an- und absteigende Flanken) jeweils einzeln berechnet werden.

Man braucht dazu einige Informationen, die uns die Z-Kurve über der Frequenz liefert:

ZMax = Peak Maximum Magnitudenbetrag, im Beispiel hier 5,0 Mohm

ZMin. = Impedanz Minima Magnitudenbetrag, im Beispiel hier=0,2 Mohm

Diese Werte ergeben sich hier anhand $Z_L=0,2$ bei einem anderen Z_L Wert sind beide Beträge verändert, ändert aber an der weiteren Vorgangsweise nichts.

Zusätzlich braucht man Fakten, die diese Rechnung ermöglichen:

Fakt1: Der reale Anteil ist bei Minima der einzige Betrag, der sich zu Z Betrag summiert,

Fakt2: Der reale Anteil ist bei Maxima der einzige Betrag, der sich zu Z Betrag summiert, da der Imaginärteil hier immer einen Nulldurchgang vollzieht, hat Phi = 0 Grad zur Folge.

Nun kann man den jeweiligen Z Wert / ZMax dividieren. Das ergibt eine Kurve mit Minima bei 0,0 und Peak Maxima bei Wert 1,0. Die Kurve ist somit normalisiert auf 1,0.

Die normalisierten Werten werden nun mit sich selbst multipliziert = Z_{norm}^2

Die Peak Maxima bleiben dabei unverändert 1,0 alle andere Werte werden dadurch geringer.

Nun ergibt sich allerdings ein kleines Problem. Werden diese Werte mit ZMax Faktor multipliziert, dann passt die gesuchte Kurve nur an den Peakspitzen, die Minima sind aber gegen Null.

Man braucht daher eine Lösung die einerseits die Peak Maxima nicht ändert, andererseits aber die Minima wieder in ihren Ausgangszustand bringt (hier auf 0,2).

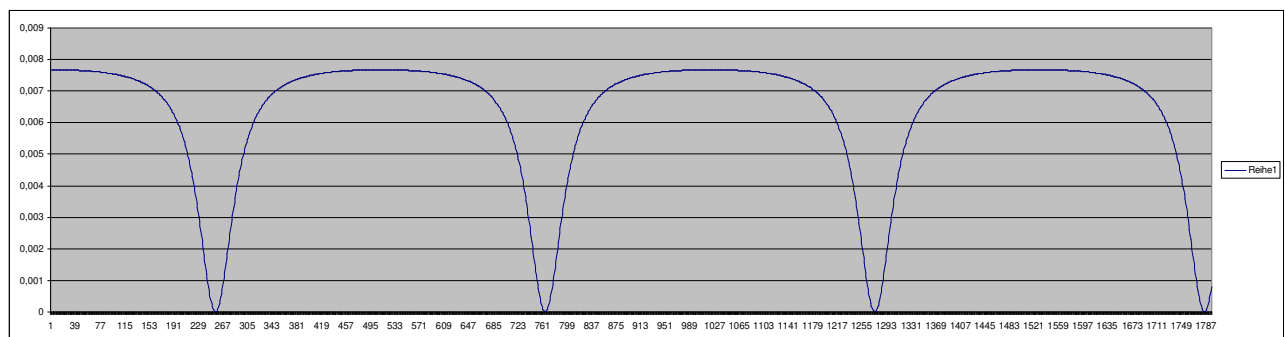
Dafür habe ich eine Lösung in 4 Schritten gefunden, Schritt 4 ist ein Korrekturschritt (Restfehler).

Schritt 1:

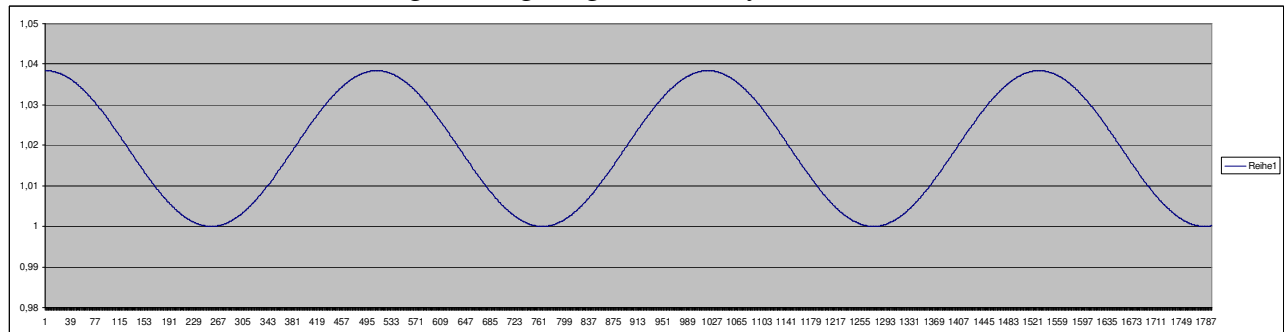
Zmax-Zmin ergibt einen kleineren Skalierungsfaktor, Z-Werte der Peaks sind dadurch vorerst absichtlich um Zmin zu klein.

Schritt 2:

Wäre konsequenterweise zu allen Z-Werten Zmin zu addieren. Das ergibt aber ein Problem, daß zwar die Peak Werte passen, die Flanken und Minima aber etwas zu groß werden. Warum ich das weiß? Durch Vergleich mit dem Realteil den ich kenne, der herauskommen muss.



Differenz in Mohm erscheint eigentlich gering, hat aber System. 0 Differenz = Peaks = Maxima



Die Abweichung als Faktor zum Ziel (bekannter Realteilanteil an Z Betrag).

An Peak Maxima würde es soweit zu 100% passen = Faktor 1,0. Man stellt aber fest, daß abfallend zu Minima ZMin als Betrag um den Faktor (hier Faktor 1,039) zu groß ist.

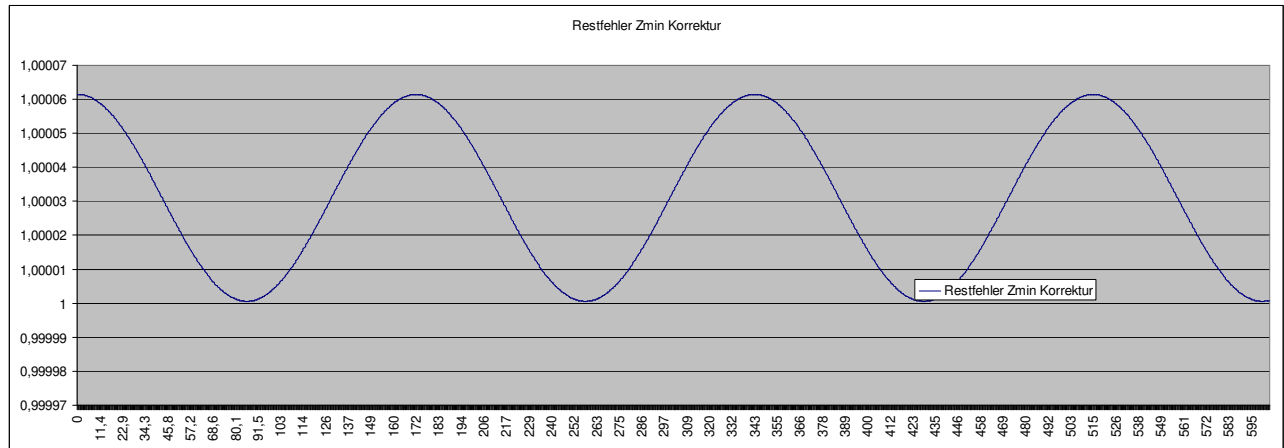
Es muss also eine Rechnung her, welche die Korrekturgröße anhand der Magnitude liefert.

Schritt 3:

Folgende Überlegungen habe ich dafür angestellt um die notwendigen korrigierten Beträge zu ermitteln:

In diesem Stadium ist der Z Max-Min Wert (hier 625) mal größer als Zmin. $5 / 0,00768$
 Zmin soll aber (hier 0,2) sein. Das Addieren von 0,2 zu 0,00768 ergibt einen zu hohen Z Wert 0,20768 bei Zmin, dieser soll ja 0,2 werden. Es wird daher bei Z Min ein Korrekturwert benötigt, der Zmin SOLL (0,2) – Zmin IST (0,00768) ergibt = Zmin Korr (= 0,19231). Bei ZMax muss er jedoch Zmin Soll Zmin Korr = 0,2) betragen. er soll also $0,2 / 0,19231 = \text{Faktor } 1,0399$ höher sein. Nun muss kurz auf Prozentrechnung umgestellt werden, damit die 1 verschwindet: = +3,993 %
 Diese 3,993% / Größenfaktor Zmax/Zmin (625) ergibt Prozent pro Größenfaktor. (0,00639%)

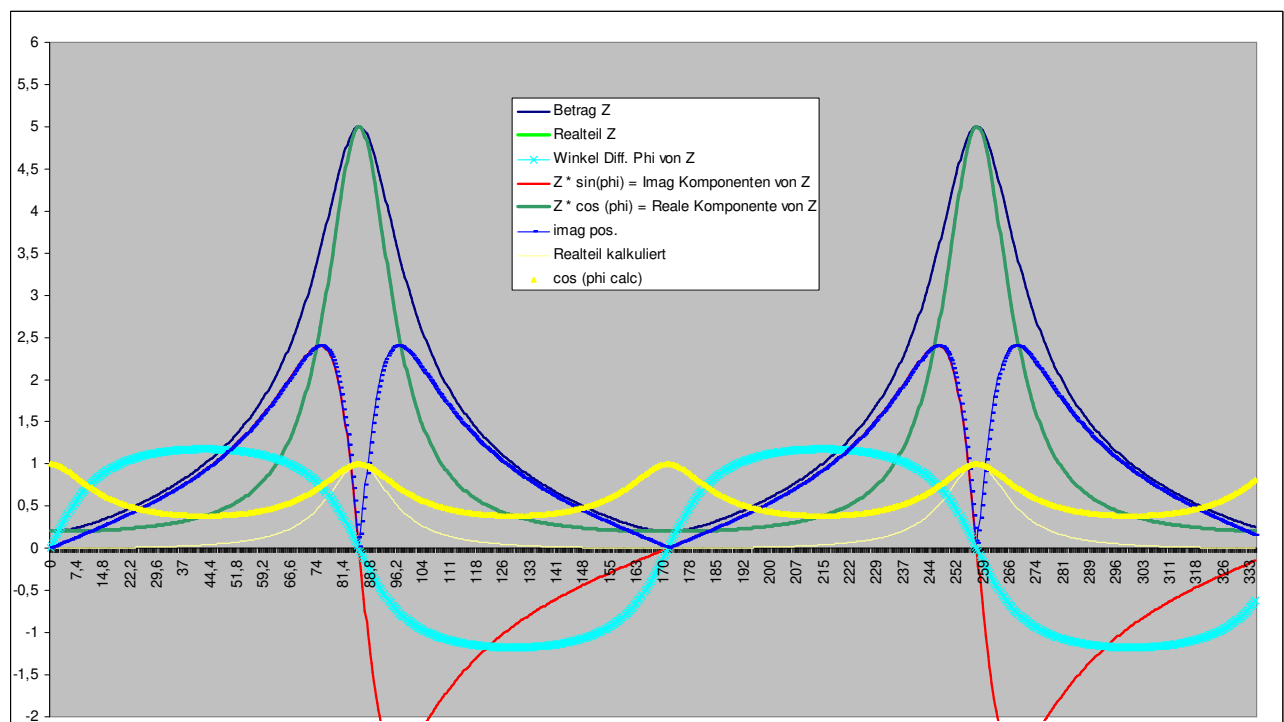
Nun ermittelt man für alle Z Werte ihren eigenen Größenfaktor zu Zmin IST,
 Größenfaktor * Prozent pro Größenfaktor = Prozent Mehränderung gegenüber Zmin Korr.
 Das rückgerechnet als Faktor $(\text{Mehränderung \%}/100)+1$ mit dem Zmin Korr Wert (0,1923)
 multipliziert ergibt den tatsächlich notwendigen Korrekturwert Zmin Korr.



Es bleibt ein äußerst kleiner Restfehler des Realanteils am Z Betrag. Die maximalen Fehler im 1/100 Promille-Bereich liegen an den Impedanzminima, hier ist der errechnete Wert jeweils minimalst zu hoch.

Schritt 4:

Allerdings kommt es dadurch zum Effekt, daß für die folgende Rechnung Werte geringst $>1,000$ herauskommen, was bei einem Cosinus Wert nicht sein kann, daher wird die gesamte Kurve um den maximalen Restfehler skaliert, damit sind die Minima exakt bei 1,0.

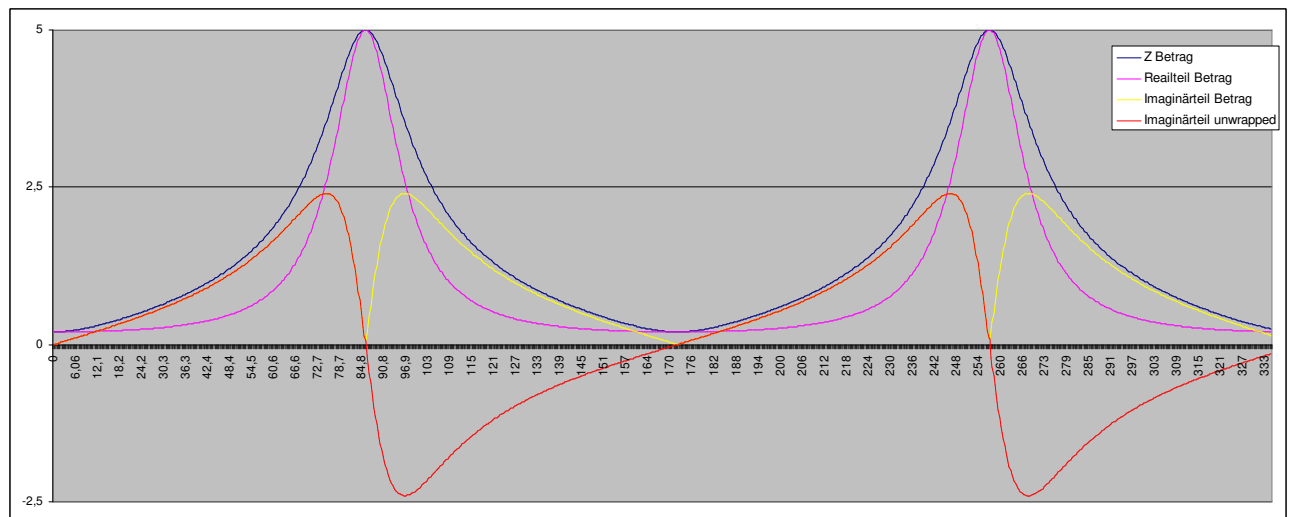


Die errechneten Realteil-Werte Impedanz und Cos(phi) sind deckungsgleich mit den Zielwerten!

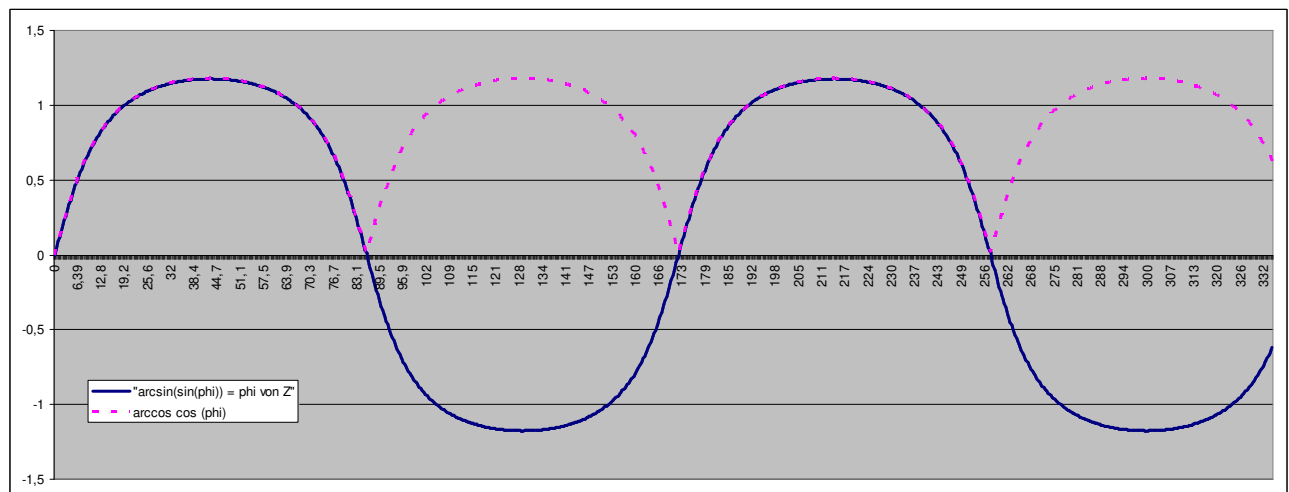
Wie geht es weiter?

Ab jetzt braucht es keine neuen Entdeckungen und Erfindungen mehr und ist nun beinahe schon Routine durch die intensive Beschäftigung mit der Materie:

Der Z Betrag² = Zeiger² = Magnitude² bildet sich aus Realteil² + Imaginärteil²
d.h. die Differenz von Z² und Realteil² muss Imaginärteil² sein,
die Wurzel daraus der imaginäre positiv hochgeklappte Anteil an Z Betrag.



Mit einer Unwrap Funktion: Wenn Steigung Z <=0; Imaginärteil bleibt positiv; 0-Imaginärteil) werden die korrekten Vorzeichen des Imaginärteils gewonnen.



Arcsin (sin (phi)) ergibt den Winkel phi von Z über der Frequenz, Arctan(IM/RE) liefert das gleiche Ergebnis. Arccos (cos (phi)) liefert ebenfalls den Winkel, hier wie erwartet aber nur positive Werte. Es wurde bei den Beispielen ZL=0,2 verwendet, daher die rundliche Form in den Grafiken. Das berechnete closed-open Rohr hat eine Länge von 1m, Zimmertemperatur, Bereich DC- 2. Min.

Ich habe viel recherchiert - aus einer Hypothese alleine kann man kein Dreieck berechnen war der Konsens, es braucht einen Winkel oder zumindest die Daten einer Kathete dazu, sonst gibt es unzählig viele rechtwinkelige Dreiecke, die diese selbe Hypothenusenlänge haben können.

Wie man sieht, geht es doch, frei nach dem Motto: Alle Experten waren sich einig – daß das nicht funktionieren kann, da kam einer (ich) und hat es einfach gemacht :)

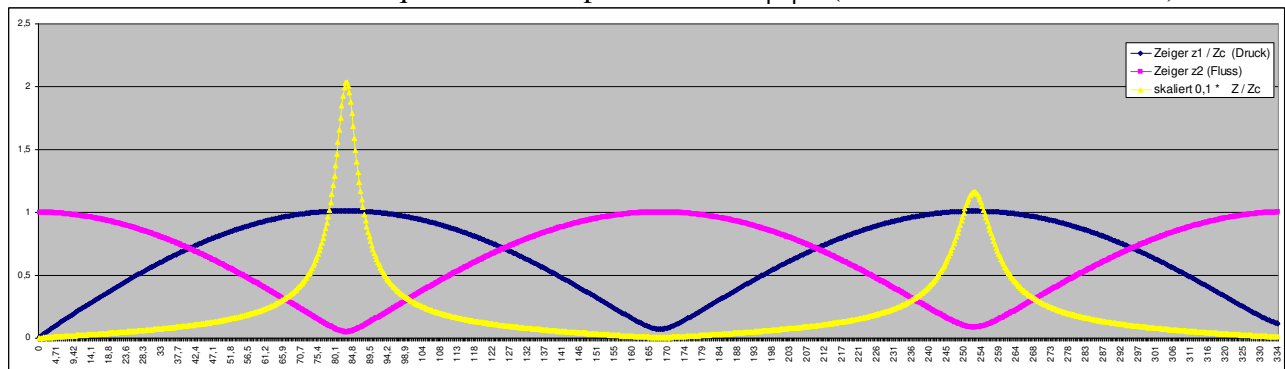
Simulationen mit der Kettenmatrix Transfer Methode:

$$\cos(i\theta) \equiv \cosh(\theta) \text{ and } \sin(j\theta) \equiv j \sinh(\theta),$$

Hyperbelfunktionen sind korrespondierend zu trigonometrischen Funktionen, die nicht als Winkel oder Kreisfunktionen am **Einheitskreis** $x^2+y^2=1$ definiert werden, sondern an der **Einheitshyperbel** $x^2-y^2=1$. Wie eng diese Funktionen miteinander verwandt sind, erschließt sich in der komplexen Zahlenebene. Sie wird durch die Relation $iy^2=-y^2$ vermittelt.

Diese Funktionen und Formeln lassen erkennen, auch andere Wege sind möglich; die Transfer Matrix Methode verwendet \sinh und \cosh , weist den Druck in A11 auf = real, A12 nahe 0, den Fluss in A22, aber A21 nahe null. Es ergeben sich andere Winkel der Einzelkomponenten Z1 und Z2 (+/-90 Grad). Statt \tan gibt es \tanh . D.h. Imaginär und Realteile sind in der TMM über und unter dem Bruchstrich vertauscht, dennoch ergibt die anschließende Division das selbe Endergebnis: Z = Realteil gleich Druckpotential und Imaginärteil gleich Flusspotential.

Druck- und Fluss über der Frequenz als Komponenten von $|Z|$ in (Transfer Matrix Methode):



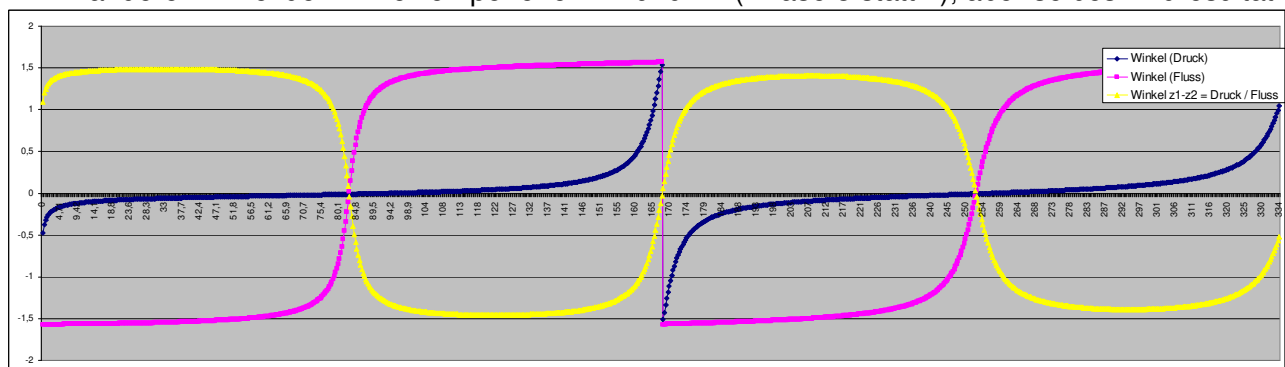
Impedanz Z (88 Mohm) und Druck z1 (43 Mohm = $\sim Z_c$) sind hier herunterskaliert für die grafische Veranschaulichung.

Druck Betrag=Zeiger z1 = $\sqrt{\text{re } z1^2 + \text{im } z1^2}$ = dadurch nur positive Werte

Fluss Betrag=Zeiger z2 = $\sqrt{\text{re } z2^2 + \text{im } z2^2}$ = dadurch nur positive Werte

Z Betrag Impedanz = Betrag z1 / Betrag z2 = Druck / Fluss

TMM: andere Winkel der Einzelkomponenten Z1 und Z2 (Phase 3 statt 1), aber selbes Endresultat.



Druck z1 (imag / real) = Steigung z1, arctan daraus der Winkel phi von z1

Fluss z2 (imag / real) = Steigung z2, arctan daraus der Winkel phi von z2

phi Druck z1 - phi Fluss z2 = Winkel = Phasenwinkeldifferenz Druck zu Fluss = phi von \underline{Z} .

Hier sieht man anschaulich wie sich der Phasenwinkel Druck - Fluss bildet;

phi z1 - phi z2 (-1) = + Druck läuft dem Fluss vor, z1 - (+1) = - Druck läuft dem Fluss nach.

Beide sind an aufsteigenden Flanken negativ = - - gibt +, an abfallenden Flanken positiv,

+ - + = -. An den Polstellen sind jeweils Nulldurchgänge mit Phasenwinkel = 0.

Die Analogie elektrischer Wellenleiter und akustischer Eigenschaften von Rohren:

Mit der Kettenmatrix-Methode wird das Rohr bzw. komplette Instrument als 4 Pol bzw. 2 Tor Übertragungssystem betrachtet. Dabei wird die Berechnung komplizierter Strukturen auf eine Hintereinanderschaltung vieler, viel einfacher(er) Systeme zurückgeführt was bedeutet, daß die zu untersuchende eventuell äußerst komplexe Mensur durch eine Abfolge sehr kurzer zylindrischer, konischer oder anderer analytisch sehr gut erforschter Teilstücke angenähert werden kann.

Die Zulässigkeit dieser Analogie ergibt sich aus der formalen Gleichheit der mathematischen Beschreibung akustischer Wellen in Rohren und elektrischer Wellen auf Koaxialleitungen.

Für einzelne Elemente existieren anhand der Leitungstheorie aus der Nachrichtentechnik Formeln in Form von 2×2 Matrizen für 4Pol bzw. 2 Tor Systeme. Durch die Multiplikation der Matrizen der einzelnen Segmente werden dadurch die Eigenschaften der vollständigen Geometrie erhalten!



Segment

q = Volumenfluss entspricht in der Elektrotechnik der Stromstärke i , x_1 =Eingang, x_2 =Ausgang
 p = Druckdifferenz entspricht in der Elektrotechnik der Spannung v (Potential)
 Ein Rohrsegment ist der lokale Abschnitt eines Wellenleiters mit jeweils komplexer Impedanz.

Ausgangsgrößen (p_2, q_2) werden zu den Eingangsgrößen (p_1, q_1) über eine 2×2 Matrix, welche das Übertragungsverhalten des Leiter(Abschnitts) beschreibt, in Beziehung gesetzt.

Die Werte der Elemente a_{nm} (als Funktion der Frequenz) hängen von den Wellenleitereigenschaften ab. Die Übertragungsmatrix vieler hintereinandergeschaltener Wellenleiterstücke und somit das Ergebnis $q_1/p_1 = Z_e = \text{Input Impedanz}$ ergibt sich aus der Multiplikation der einzelnen Teilmatrizen!

Zur Ermittlung der Eingangsimpedanz (p_1/q_1) = Druck zu Fluss ist es notwendig, den Wellenleiter mit einem komplexen frequenzabhängigen Abschlusswiderstand (Z_a) = p_2/q_2 zu versehen. Dieser muß das Verhältnis von Druck zu Volumenfluss am Ende des Wellenleiters anhand der dort frequenzabhängigen Randbedingungen beschreiben, und wir wissen, das ist bei Rohren und vor allem bei Schallbechern nicht restlos geklärt. Es gesellt sich noch eine zusätzliche komplexe Radiation Impedanz hinzu. Auch wenn diese gering sein mag, ist jede weitere Rechnung daher bereits fehlerbehaftet. Der Fisch fängt bekanntlich beim Kopf zum Stinken an.

p_2/q_2 beschreibt den komplexen Abschlusswiderstand Z_a eines Segments; dieser „diktiert“ die Möglichkeiten, die Simulation erfolgt daher vom Abschluss zum Eingang -> Lippenebene Z_e .

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

komplex: 1. da frequenzabhängig + 2. Real+Imaginärteil
 komplexer Eingang = komplexes Übertragungssystem * komplexer Abschlusswiderstand. $q=U$

$$Z_e = \frac{Z_a a_{11} + a_{12}}{Z_a a_{21} + a_{22}}$$

Nimmt man an $p_2 = Z_a q_2$, dann ergibt sich als Eingangsimpedanz:

Die so ermittelte komplexe Eingangsimpedanz Z_e eines einzelnen Segments ist wiederum der komplexe Abschlußwiderstand Z_a des folgenden Segments in Richtung Eingang. <--

Beim 1. Segment ist $Z_a = Z_{\text{rad}}$, Z_e dieses Segments bildet Z_a des 2. Segments, usw. bis zum Eingang $Z_e = p/U$

Für ideal schallhart geschlossene Rohre wäre der Schallfluss real am Ende Null, der Abschlusswiderstand unendlich, was elektrotechnisch einem Leerlauf entspricht, Phasendrehung Fluss 180 Grad = übergangsweise Stillstand = Nulldurchgang Volumenfluss. Reflektion ohne Phasendrehung bei Druck.

Der andere Grenzfall $Z_a = 0$, bei dem der Druck am Ausgang komplett verschwinden würde = **ideal offenes Ende**, wäre Null Widerstand = maximale Stromstärke, das entspricht einem elektrischen Kurzschluss, diesen finden wir bei closed-open Zylindern: Als Reflektion +180° Shift der Druckwellen am offenen Ende. <--

Aber wie „durch ein Wunder“ entweichen dennoch –auch beim closed-open Zylinder - Druckwellen in den Raum, und wir haben den erwarteten Effekt, daß die Druckwellen auch vom Publikum im Raum gehört werden können, wir haben eine reduzierte Reflektion -% Richtung Eingang <--, die um die Transmission in den Raum --> und etwas zusätzlichen Widerstand = Radiation Impedanz verringert ist. Es sollte somit klar sein, daß eine verringerte Schallabstrahlung mehr Reflektion und Unterstützung der Lippen bzw. Rohrblätter bieten kann, eine erhöhte Abstrahlung weniger Unterstützung liefert. Reflektion+Transmission=1,0.

Für den Abschlusswiderstand Z_a und Radiation Impedanz lautet die Formel von Levine und Schwinger in einer von den Autoren vorgeschlagenen Näherung für einen Kolbenstrahler mit Radius r_a bzw. R ohne unendlicher Schallwand: $Z_{rad} = \text{Re} = \rho c / S * [(k*a)^2 / 4] \quad \text{Im} = \rho c / S * k*a * 0,6133$

$$Z_a \cong \frac{\rho c}{\pi r_a^2} \left(\frac{(k r_a)^2}{4} + i 0.6133 (k r_a) \right) \quad z_r = 0.5 \frac{\omega^2 \rho}{\pi c} + 0.6133 j \frac{\omega \rho}{\pi R}.$$

©Alistair Braden
die Formel ist gleichwertig, er gibt aber Faktor 0,5 für RE.

Zur Berechnung der Eingangsimpedanz wird die betrachtete Mensur in zylindrische und kurze konische Teilstücke zerlegt, deren Übertragungsmatrizen analytisch bekannt sind. In den Formeln werden nun auch thermoviskose Verluste an den Wandungen über den ermittelten Ausbreitungskoeffizient Γ berücksichtigt, die Segmentlänge beträgt l , die Funktionen beziehen sich auf Γl .

Komplexe hyperbolische Funktionen: $\cos(i\theta) \equiv \cosh(\theta)$ and $\sin(j\theta) \equiv j \sinh(\theta)$,
Eulersche Zahl = $\cosh(1)=1,543.. + \sinh(1)=1,175..=\exp(1)=2,7182.. =e^1$

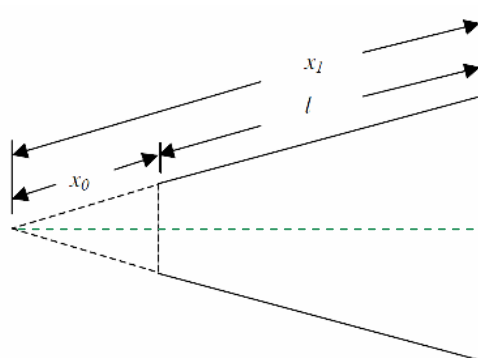
Matrizenelemente für zylindrische Rohrabschnitte:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cosh(\Gamma l) & a_{12} &= Z_c \sinh(\Gamma l) \\ a_{21} &= \frac{1}{Z_c} \cosh(\Gamma l) & a_{22} &= \cosh(\Gamma l) \end{aligned}$$

Zylinder: a_{11} und a_{22} sind ident!

Für einzelne konische Segmente (x0 der fehlende Teil) lauten die Berechnungsformeln:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \left[\cosh(\Gamma l) - \left(\frac{1}{\Gamma x_1} \right) \sinh(\Gamma l) \right] \\ a_{12} &= \left(\frac{x_0}{x_1} \right) Z_c \sinh(\Gamma l) \\ a_{21} &= \left(\frac{1}{Z_c} \right) \left[\left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{1}{(\Gamma x_0)^2} \right) \sinh(\Gamma l) + \left(\frac{\Gamma l}{(\Gamma x_0)^2} \right) \cosh(\Gamma l) \right] \\ a_{22} &= \left(\frac{x_0}{x_1} \right) \left[\cosh(\Gamma l) - \left(\frac{1}{\Gamma x_0} \right) \sinh(\Gamma l) \right]. \end{aligned}$$



Geometrieparameter konischer Segmente (Frustum)

Jedes Element der Transfer Matrix ist eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil.
Folgende Werte und Parameter fließen in die charakteristische Impedanz Z_c und den Ausbreitungskoeffizienten Γ mit ein:

- $r_v...$ Verhältnis Rohrradius zur Dicke der viskosen Randschicht, das heißt zu dem Bereich in der die Verluste an den Rohrwänden von Bedeutung sind
- $R_0...$ Charakteristische Impedanz bei Vernachlässigung von Verlusten
- $k...$ Wellenzahl
- $\rho...$ Dichte der Luft (1.29 kg m^{-3} , bei 0°C und 101.3 kPa)
- $\eta...$ Dynamische Viskosität der Luft ($1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ bei 20°C)
- $c...$ Schallgeschwindigkeit in Luft (in Abhängigkeit von der Temperatur T in $^\circ\text{C}$:
[$331.6 + 0.6 T$] m s^{-1})
- $\omega...$ Kreisfrequenz ($2 \pi f$)
- $S...$ Querschnittsfläche (bei Konus mittlerer Querschnitt).

$$R_0 = \frac{\rho c}{S}$$

Z_c bei Vernachlässigung von Verlusten

$$r_v = \sqrt{\frac{\rho \omega S}{\eta \pi}}$$

(ergibt auch geänderte v Phase)
Verhältnissfaktor Rohrradius zu viskoser Randschicht

Z_c ist in den Elementen a_{12} sowie a_{21} enthalten und hat hier auch einen imaginären Anteil.
Die charakteristische Impedanz Z_c der Segmente mit Berücksichtigung von Verlusten beträgt:

$$Z_c = R_0 \left[(1 + 0.368 r_v^{-1}) - i 0.368 r_v^{-1} \right]$$

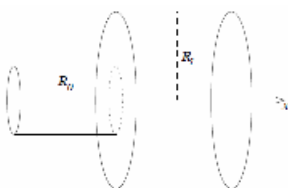
Alistair nennt 0,369

$\wedge -1 = \text{reziproker Wert}$

Der Ausbreitungskoeffizient Γ mit Berücksichtigung von Verlusten berechnet sich zu

$$\Gamma = k \left[1.045 r_v^{-1} + i (1 + 1.045 r_v^{-1}) \right]$$

Querschnittsprünge – Boresteps – Bore Discontinuities (nicht auf Zylinder beschränkt):



$$S^{(0)} v^{(0)} = S^{(1)} v^{(1)}, U_0 = U_1, p_0 = p_1, Z_0 = Z_1 \rightarrow Z_c \neq Z_c$$

Wie ein solcher Sprung sich auf die Ausbreitung einer ebenen Welle auswirkt erklärt Alistair so:
Um Kontinuität zu bewahren (Massenstromerhaltung, Bernoulli) muss der Druck auf beiden Seiten gleich sein. $p_0 = p_1$, ebenso muß es beim Volumenfluss sein $U_0 = U_1$, folglich ist die Impedanz Z an beiden Seiten ebenfalls gleich.

Die Partikelgeschwindigkeit = Schallschnelle v verändert sich: Ist der Sprung positiv, dann kleinere Geschwindigkeit v , negativer Step = weniger Fläche = größere Schallschnelle. Der Borestep kann also aus der Matrix Berechnung ausgenommen werden, was bedeutet, daß die Segmente nicht mit selben Radien aneinander grenzen müssen, es gibt daher keine eigene Matrix für einen Step.

Die charakteristische Impedanz $Z_c = \rho c / S$ differiert aber zu beiden Seiten des Sprunges (Segmenten) und Z / Z_c wird daher ebenfalls unterschiedlich sein. Z / Z_c ist das Mass um wieviel höher die Impedanz-Magnitude gegenüber der charakteristischen Impedanz ist. Siehe fractional Return Faktor.

*Daraus folgt – Eine lokale Querschnittänderung = Perturbation, gewollt oder ungewollt:
Wird ein solcher Step kurz später wieder rückgängig gemacht ist es ein lokaler GAP, ein eigenes Segment mit größerem Querschnitt, lokal geringerer v und Z_c , dafür aber lokal höherem Druck.*

Ein negativer Step + spätere Korrektur ist eine lokale Constriction, ein eigenes Segment mit geringerem Querschnitt, lokal höherer v , höherer Z_c , dafür lokal geringerem Druck.

Simulationssoftware und wie diese unter der Haube funktioniert:

Das sind die notwendigen Formeln und Berechnungsschritte zur Simulation von Blasinstrumenten. Es gibt weitere Matrizen. Alistair gibt in seiner Doktorarbeit für ein Besselhorn folgende Formeln:

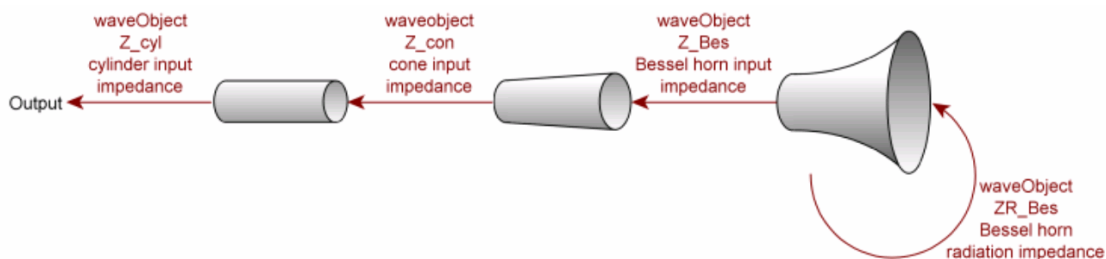
$$z_0 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$$

$$a = [J_{\gamma+1/2}(kx_0)Y_{\gamma-1/2}(kx_1) - Y_{\gamma+1/2}(kx_0)J_{\gamma-1/2}(kx_1)]$$

$$b = jz_c \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{-2\gamma} [J_{\gamma+1/2}(kx_0)Y_{\gamma+1/2}(kx_1) - Y_{\gamma+1/2}(kx_0)J_{\gamma+1/2}(kx_1)]$$

$$c = -\frac{j}{z_c} [Y_{\gamma-1/2}(kx_0)J_{\gamma-1/2}(kx_1) - J_{\gamma-1/2}(kx_0)Y_{\gamma-1/2}(kx_1)]$$

$$d = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{-2\gamma} [Y_{\gamma-1/2}(kx_0)J_{\gamma+1/2}(kx_1) - J_{\gamma-1/2}(kx_0)Y_{\gamma+1/2}(kx_1)],$$

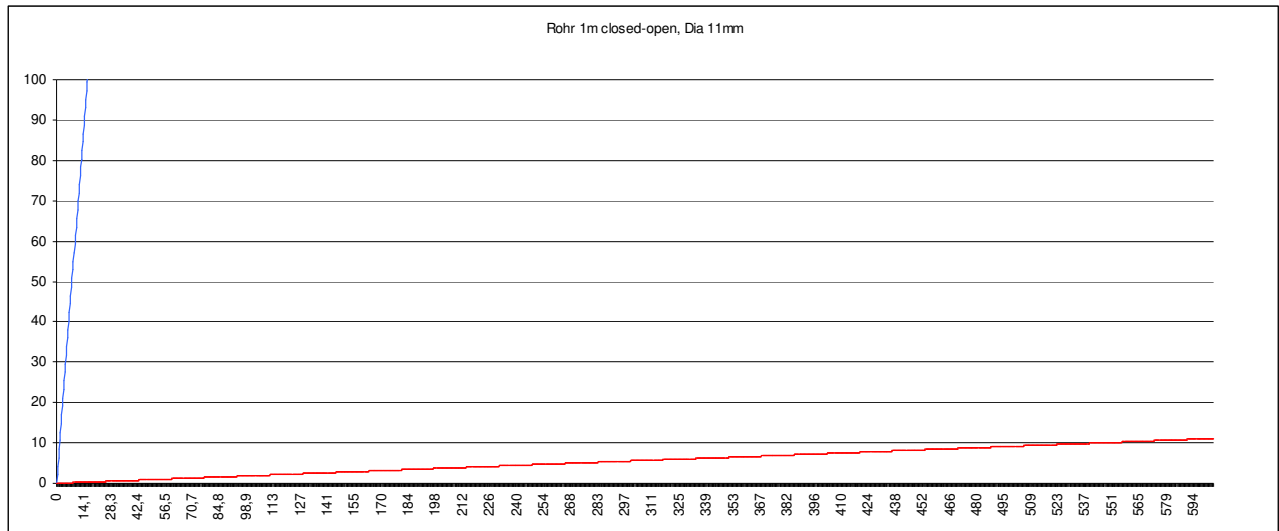
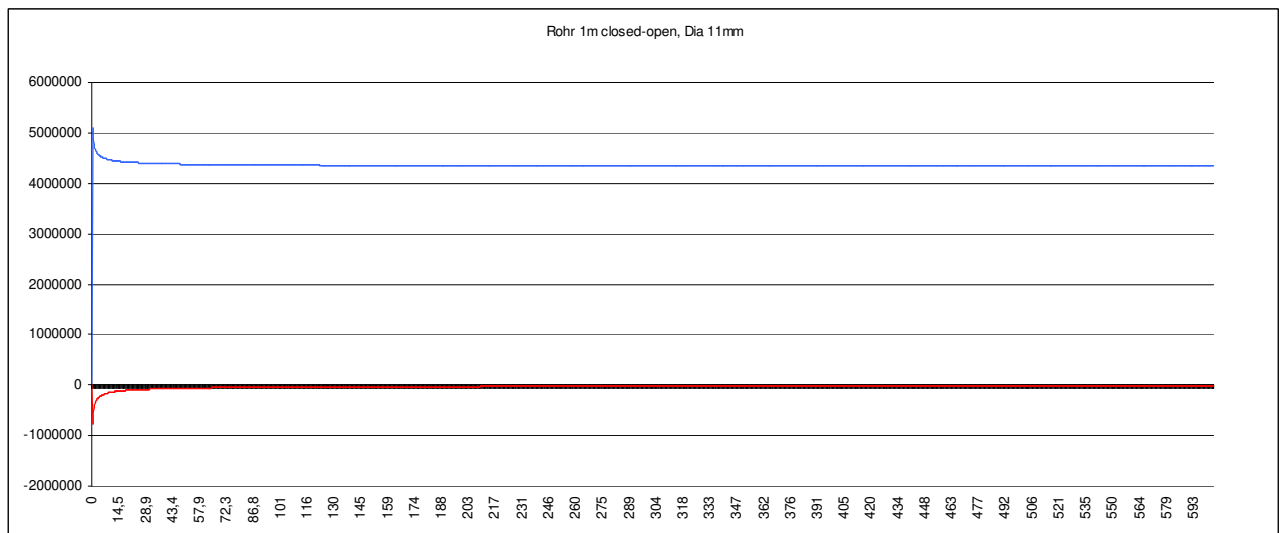


Berechnungen starten immer mit der Radiation Impedanz am offenen Ende und enden am Eingang. Das ART Acoustic Research Tool als Beispiel hat weitere Matrizen für gebogene Zylinder, gebogene konische Teile, Tonlöcher, Besselhorn, etc. integriert. Info und Download: <http://artool.sourceforge.net/index.html>

Nun kann man sich anhand der Formeln vermutlich kaum ein Bild machen, was hier tatsächlich abgeht. Ich habe das daher mit einem normalen Zylinder – Länge 1m, Durchmesser 0,11m und Raumtemperatur in Excel nachgestellt. Es beschreibt also nur ein einziges zylindrisches Segment anhand der genannten Formeln für ein zylindrisches Matrix Element mit Radiation Impedanz laut Levine-Schwinger, ebener Wellen und Berücksichtigung von Reibungsverlusten.

Excel hat zwar einige Formeln für komplexe Zahlen, ich habe mich hier aber eines Addon bedient, **MULTI-PRECISION FLOATING POINT COMPUTATION For EXCEL, XNUMBERS.XLA - Ver. 4.0** welches die Berechnung etwas einfacher gestaltet, es beherrscht unter anderem die geforderten komplexen hyperbolischen Winkelfunktionen, Division, Inversion usw. Dennoch wäre man mit Excel recht schnell am Limit, würde man versuchen ein komplettes Instrument zu berechnen. Ich habe das nicht vor, die Berechnung war seinerzeit die Vergleichsrechnung zum Kalibrieren des Impedanzmesskopfes mit zylindrischen Rohren. Aber hier sieht man, wie die Simulationssoftware ART bzw. BIAS / BIOS ©Artim tatsächlich rechnen und funktionieren. Der Übersichtlichkeit halber wird hier nur der unterste Frequenzbereich dargestellt.

Die Berechnungsschritte der obigen Parameter w , S , r_v und R_0 sind nicht dargestellt, die Frequenzauflösung beträgt 0,16 Hz, Schallgeschwindigkeit 343 m/Sek. Dichte Luft: 1,19595 R_0 =char. Impedanz ohne Berücksichtigung von Verlusten =4,316.501 akustische Ohm =4,3 Mohm

blau: Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$ rot: Kreiswellenzahl $k = \omega/c$ 

Zc mit Berücksichtigung von Verlusten

blau: Realteil,

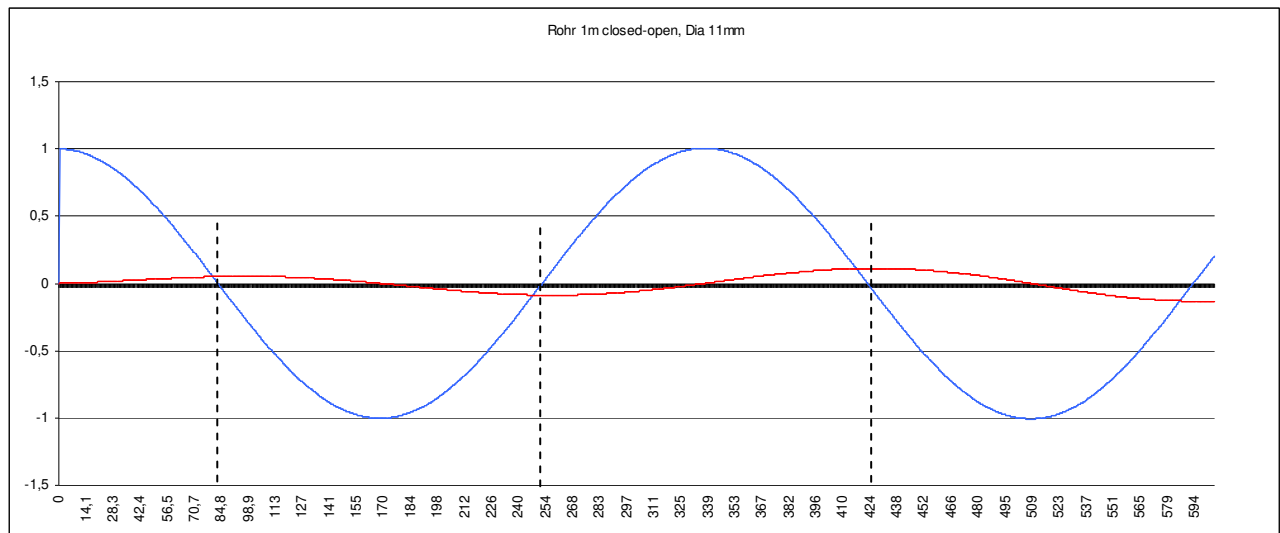
rot: Imaginärteil

Ausbreitungskoeffizient (Winkel) Γl

blau: Realteil hier max. 0,13 rot: Imaginärteil:

>1,57rad bei 1. Peak=90 Grad, >3,14 bei 1. Minima =180 Grad, >4,71 bei 2. Mode=270 Grad,
 Imagteil $\sim k$, steigt linear minimal stärker als k, z.B. 11,1 bei 600 Hz gegenüber $k=10,989$

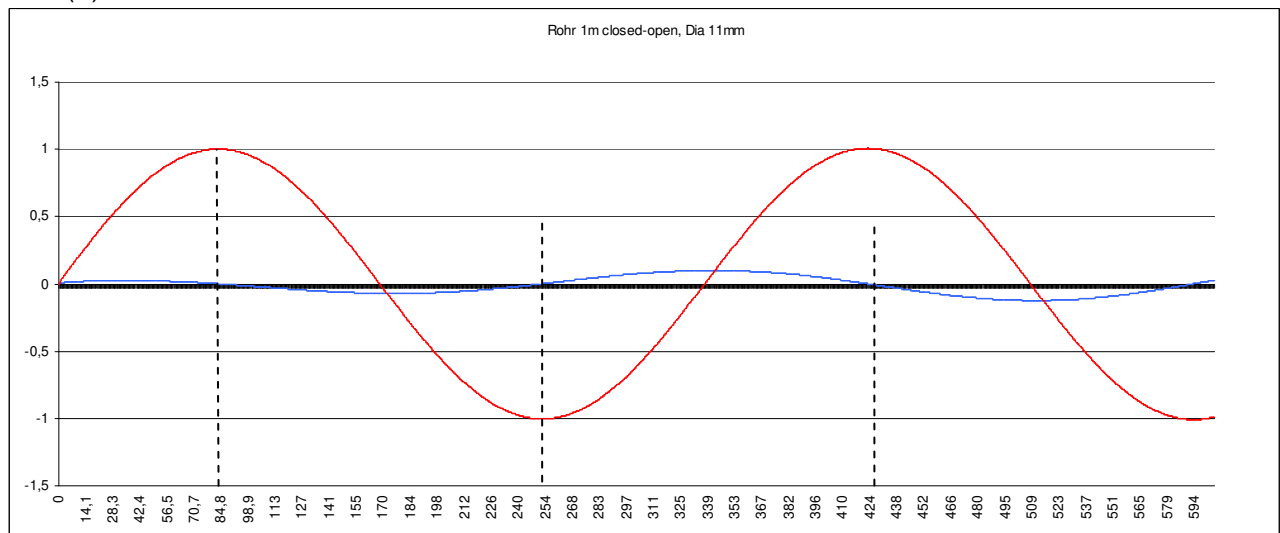
In Γl sind ebenfalls wandnahe Verluste enthalten, $k=w/c$, $>k = c$ phase gering kleiner (Reibung)



$A_{11} = \cosh(\Gamma l)$
 $\cosh(0) = 1$

blau: Realteil rot: Imaginärteil

strichliert: spätere Peaks

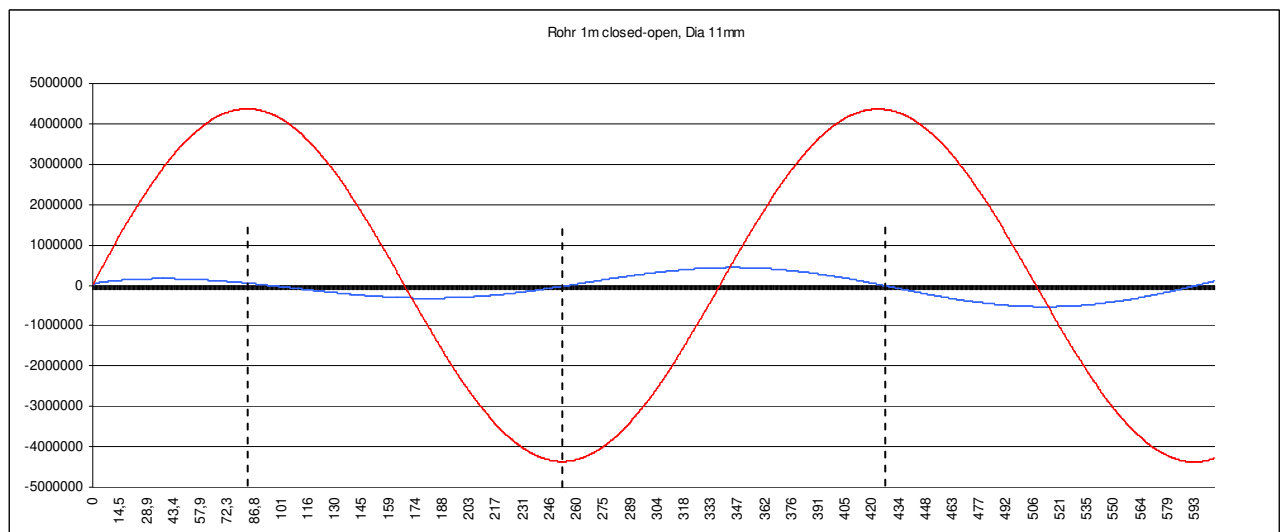


$= \sinh(\Gamma l)$

$\sinh(0) = 0$

blau: Realteil rot: Imaginärteil

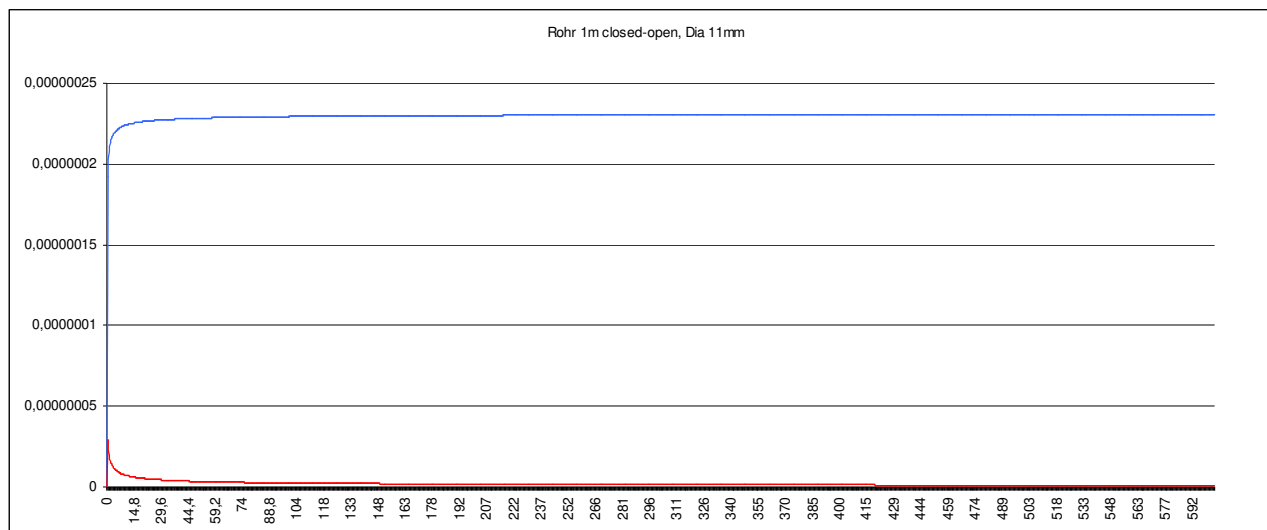
-> wird nun mit Z_c komplex multipliziert, ergibt dann A_{12}



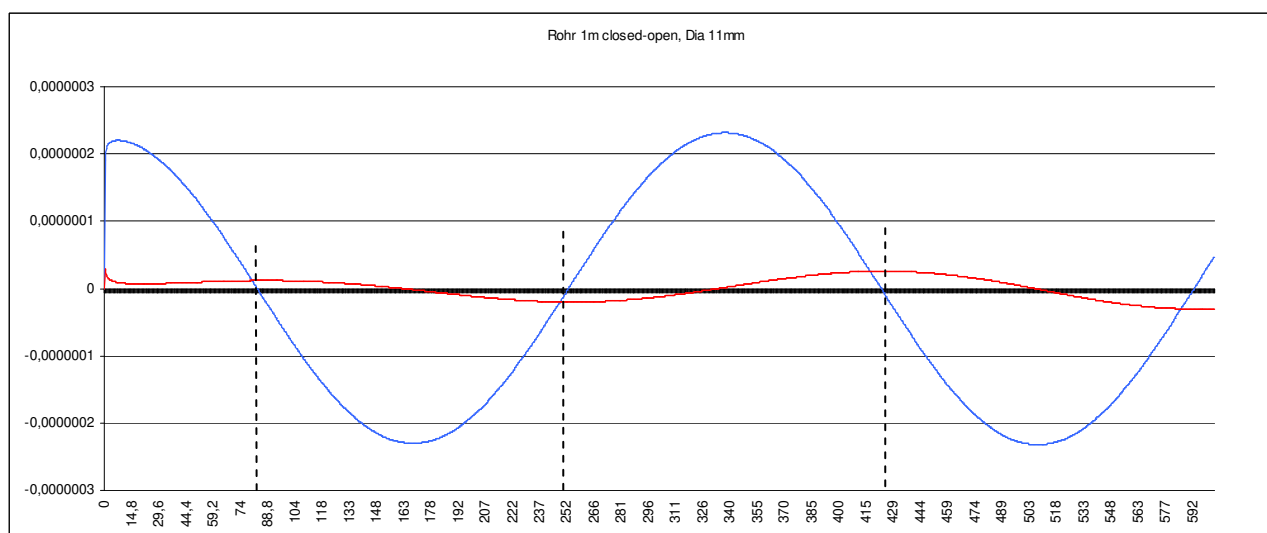
$A_{12} = Z_c * \cosh(\Gamma l)$

blau: Realteil rot: Imaginärteil

Imaginärteil jetzt Amplitude = Z_c (4,3 MOhm)



komplexe Inversion $1/Z_c$ wird für Element 21 benötigt, blau: Realteil rot: Imaginärteil

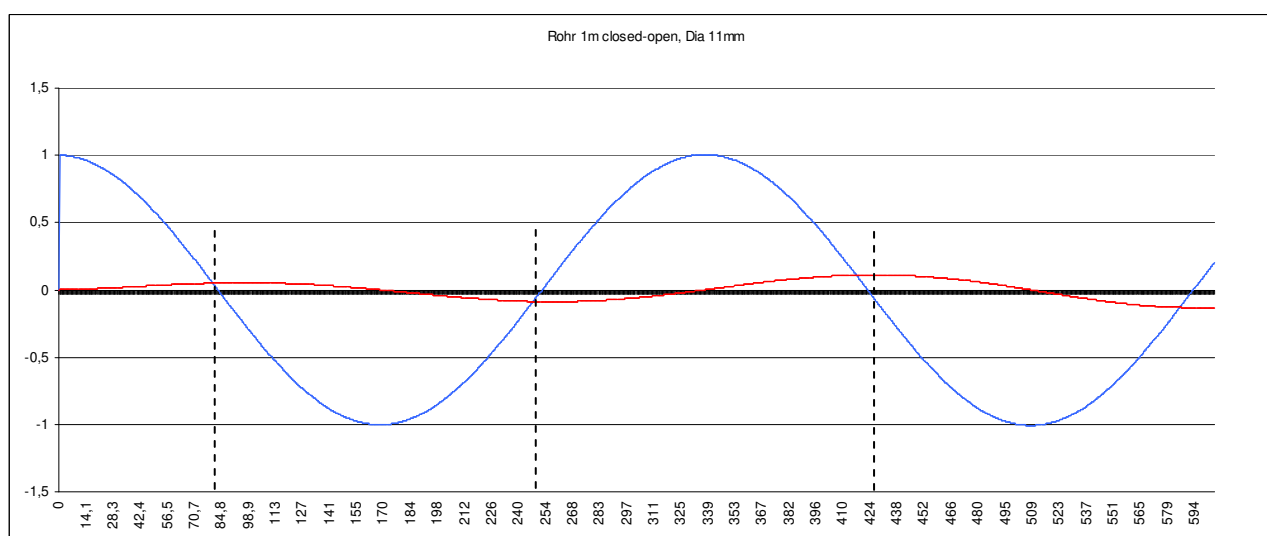


$$A_{21} = 1/Z_c * \cosh(\Gamma l)$$

blau: Realteil

rot: Imaginärteil

Magnitude Realteil jetzt $1 / 4,3 \text{ Mohm}$



$$A_{22} = \cosh(\Gamma l)$$

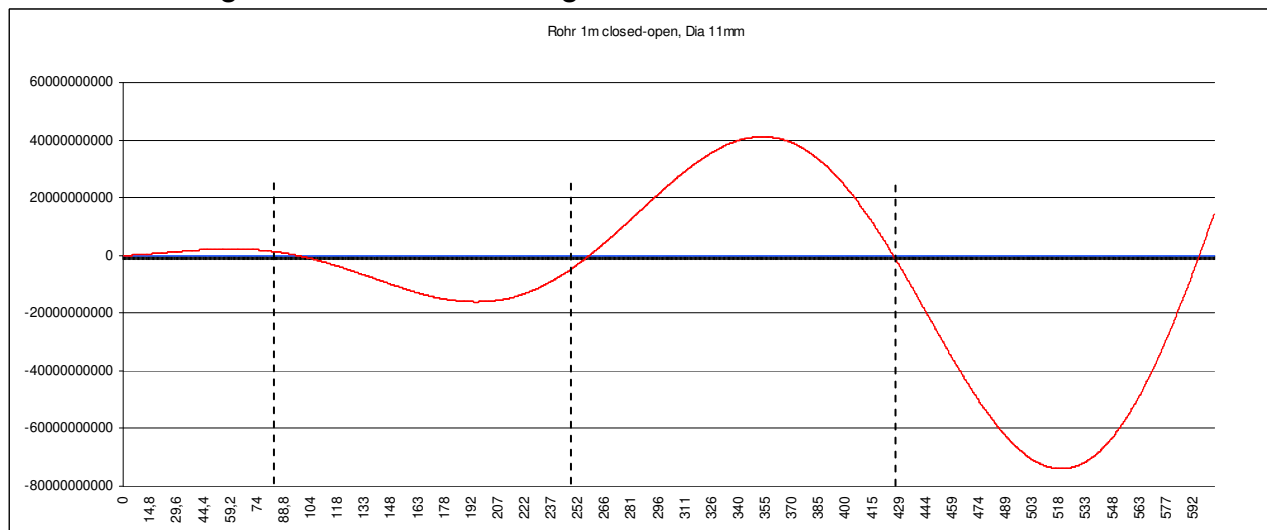
nur beim Zylinder ident mit A11!

blau: Realteil rot: Imaginärteil



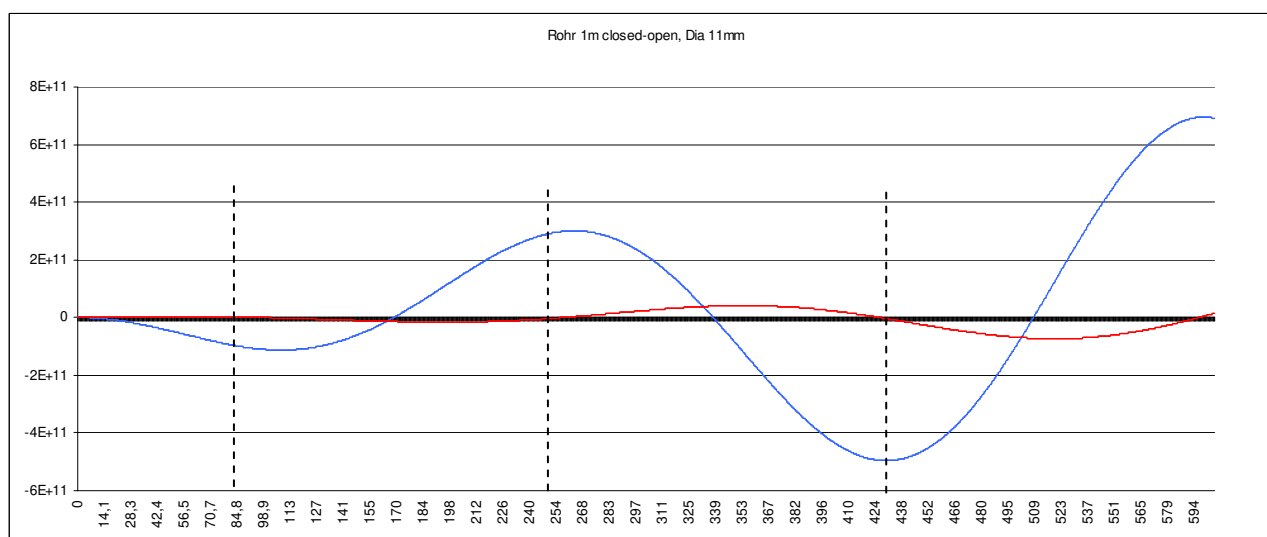
Radiation Impedanz Z_a Kolbelstrahler, $Z \ll k a = 1$; blau: Realteil, steigt quadratisch rot: Imaginärteil
Im unteren Frequenzbereich, beinahe ausschließlich imaginär $Im = 0,16 \text{ MOhm}$ bei 600 Hz

Nun kann die eigentliche Matrizze des Segments berechnet werden:



$A_{11} + A_{12}$, wird noch mit Z_a komplex multipliziert

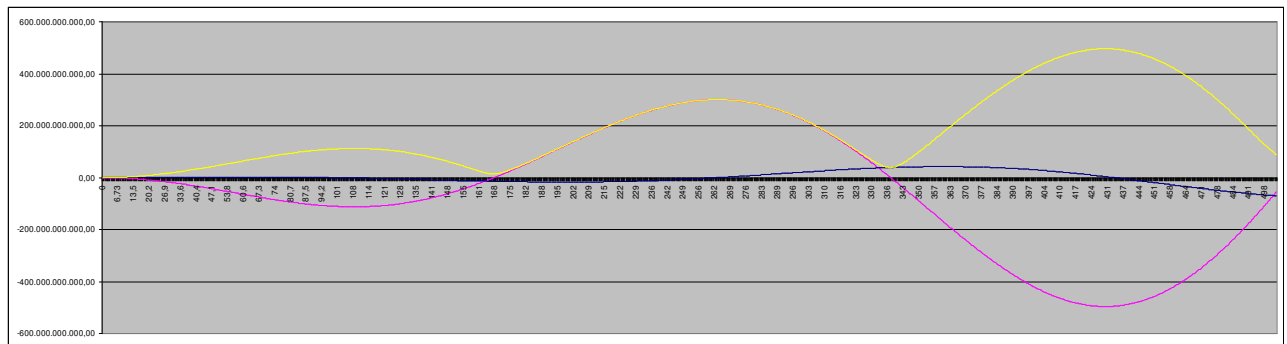
blau: Realteil rot: Imaginärteil



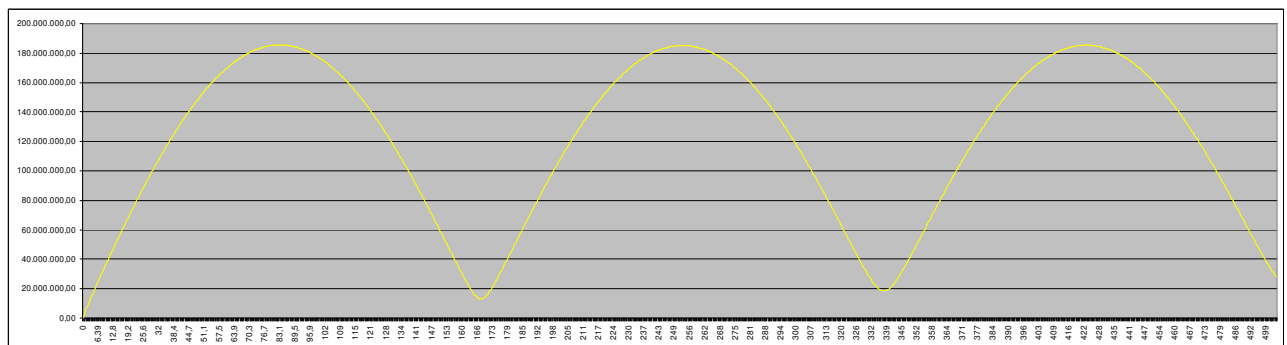
$Z_a * (A_{11} + A_{12})$
 $z_1 = P/Z_c$

komplex multipliziert = **Druckkomponente** blau: Realteil rot: Imaginärteil
Der Druck wäre dann der Betrag von $|z_1| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$, proportional zu ω .

Der obere Teil der Matrix mit Zrad komplex multipliziert:



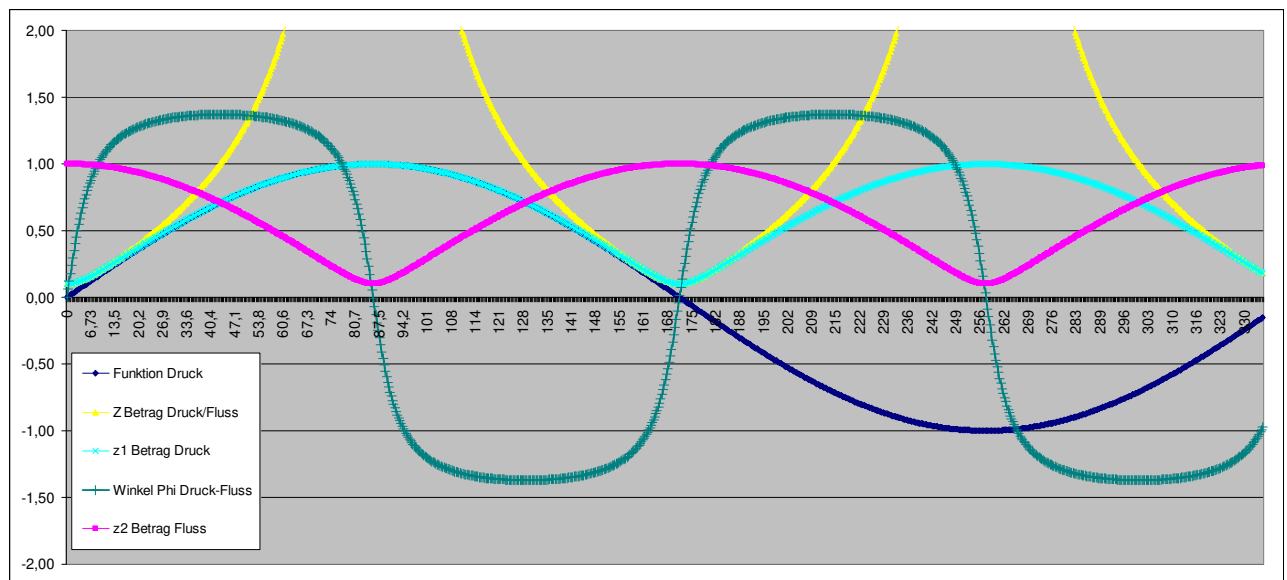
$p = Z * U$ $z1 = Z * z2$ rosa: Realteil, blau: Imaginärteil, gelb: Betrag $|p|$



Druck ist proportional zu ω :

Ergebnis $|p| / \omega$

etwas unhandliche Größe der Magnitude,
siehe dazu:

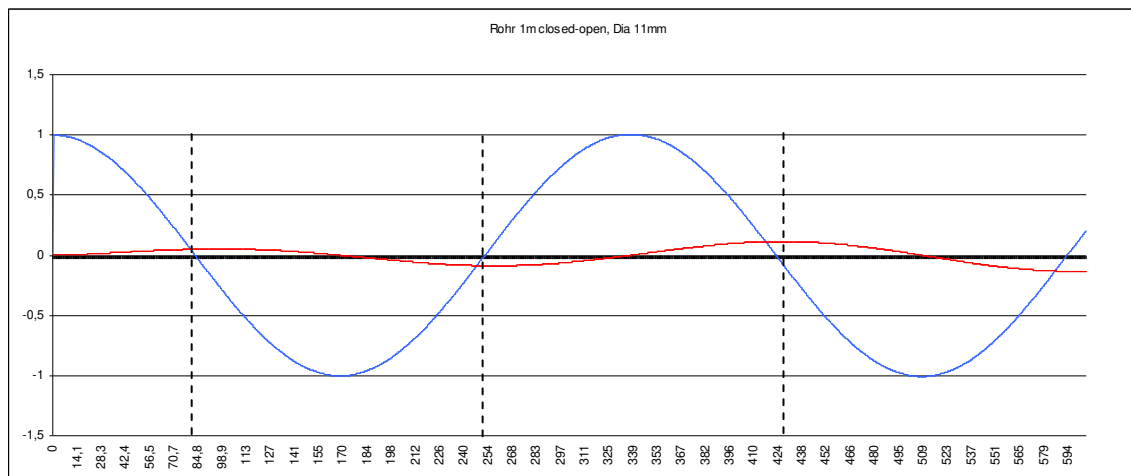


Betrag von $z1/Zc$

Druck normalisiert,

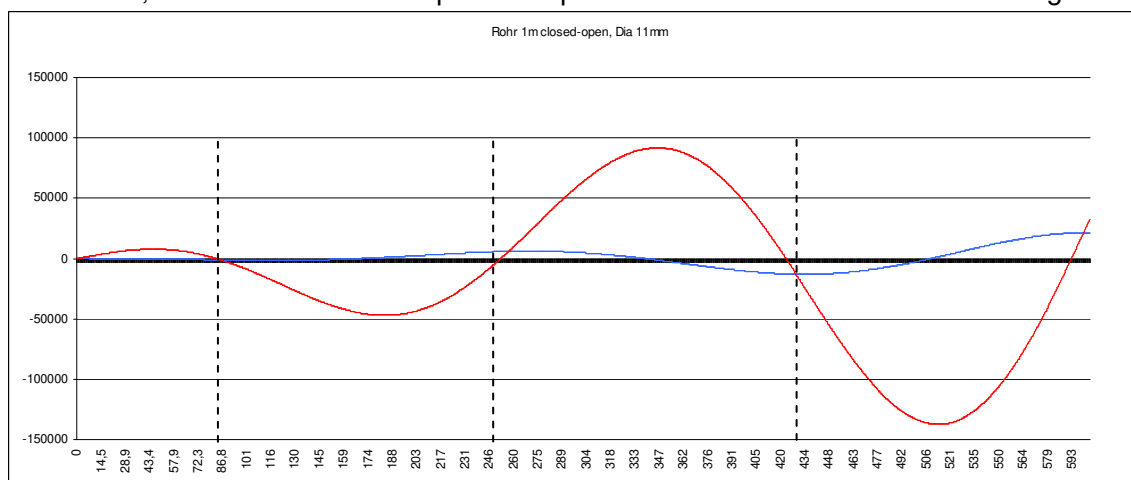
Betrag $z2 = \text{Fluss}$ normalisiert

Der untere Teil der Matrix:



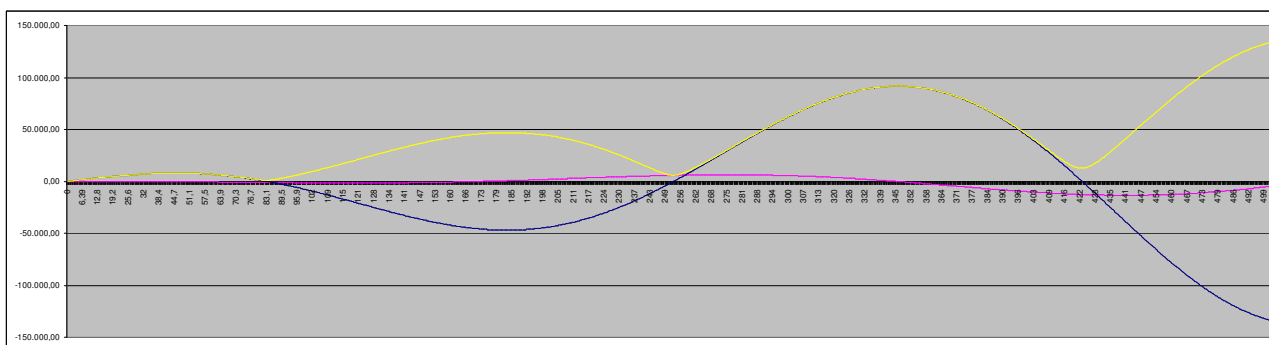
A21 + A22, wird noch mit Z_a komplex multipliziert

blau: Realteil rot: Imaginärteil



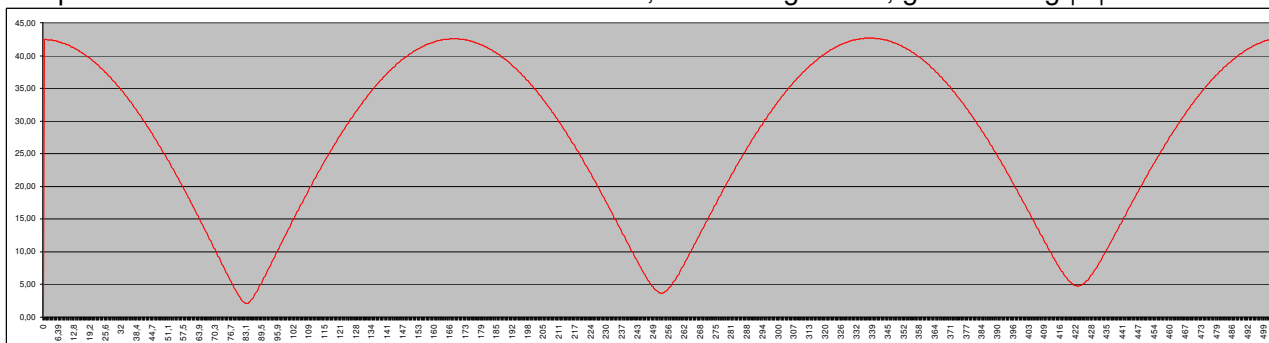
$Z_a * (A21 + A22)$
 $= z2 = Z_c / U$

komplex multipliziert = **Flusskomponente** blau: Realteil rot: Imaginärteil
 Der Fluss wäre dann der Betrag von $|z2| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$, proportional zu ω



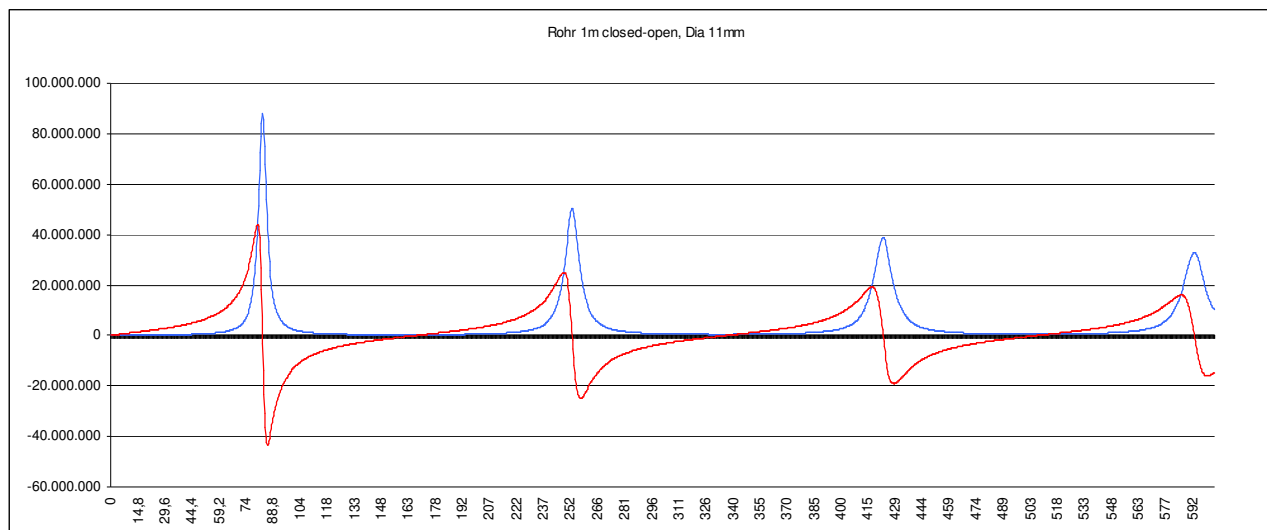
$U = p / Z = z1 / Z$

rosa: Realteil, blau: Imaginärteil, gelb: Betrag $|U|$



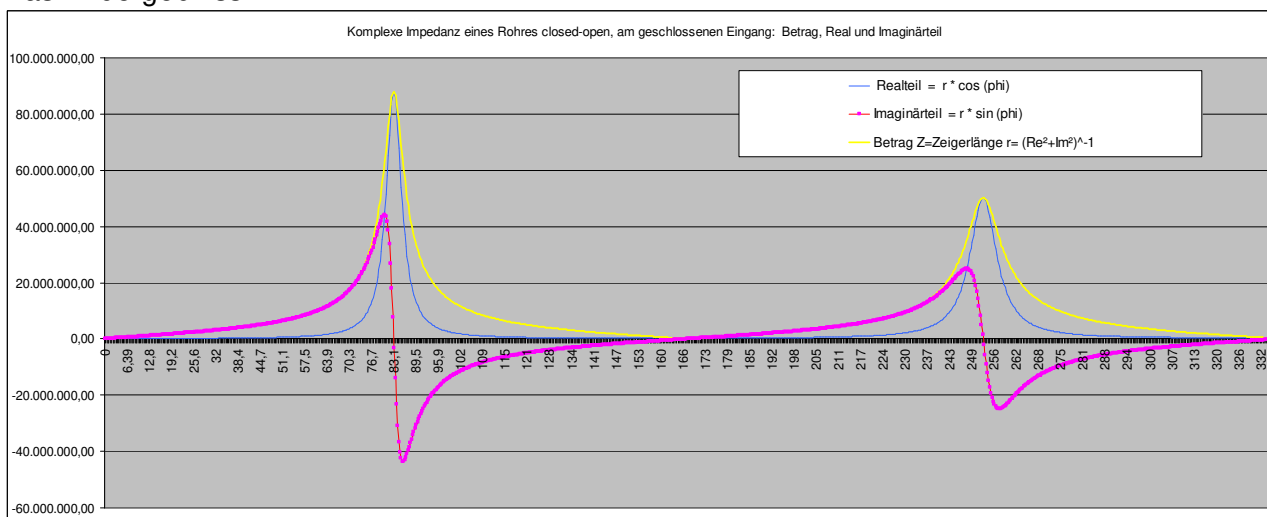
Fluss ist proportional zu ω :

Ergebnis $|U| / \omega$

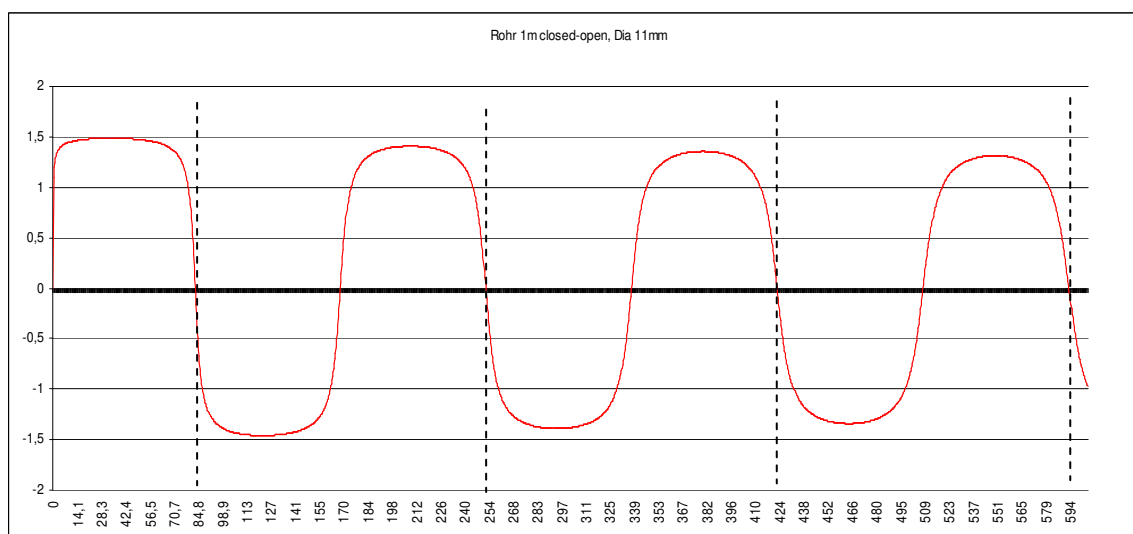


$Z_{in} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{p/Z_c}{U} = \frac{p}{U}$ = komplexe Division Druck/Fluss = Z_{in}
 blau=Realteil, rot=Imaginärteil von Z in akustisch Ohm

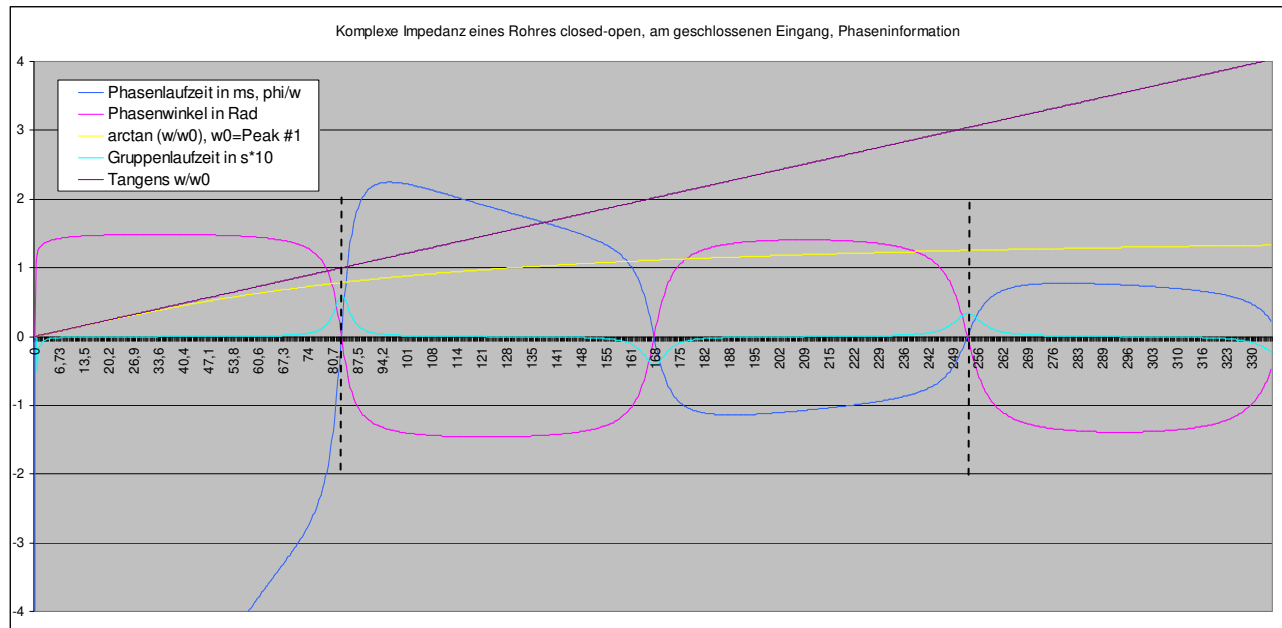
Das Endergebniss:



Z_{in} , |Betrag| = Magnitude Z_{in}



Z_{in} , Phasenwinkel Differenz Druck-Fluss in Rad



Abgeleitet daraus: Phasenlaufzeit, Gruppenlaufzeit – siehe Sideletter 1 – Physik Basics.

Folgendermassen ermittelter Druck und Fluss sind proportional zur Frequenz ω .

$$p(\omega) = Z(\omega)u(\omega)$$

$$p(t) = g(t) * u(t)$$

$/\omega = \text{normalisiert.}$

Im Frequenzbereich

im Zeitbereich

| | | | | | |
|--------------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|---|
| $ Z _{in(\omega)} = p/U$ | Druck | $ p (\omega) = Z * U$ | Fluss | $ U (\omega) = p / Z$ | \rightarrow komplex multipliziert oder dividiert. |
| =Betrag Z | | =Betrag z1 | | =Betrag z2 | $/ \omega = \text{normalisiert}$ |

Reflektionsfaktor = Reflektionskoeffizient:

Oft ist es schwierig, richtige Informationen zu bekommen, da häufig und oft in wissenschaftlichen Arbeiten abgeschrieben wird. So ergibt sich oft die Frage $|Z|$ Beträge, Realteile oder komplexe Berechnung. Speziell beim Reflektionsfaktor habe ich hier lange gesucht, was denn nun richtig sei. Manche namhafte Quellen, meinen $Z(w)$ ist die Eingangsimpedanz, andere erklären der Betrag, oft steht Z_L = das L steht für Load aus der Elektrotechnik. Beim Messen der akustischen Impedanz stellt sich die Frage nicht, da Z_L bzw. Z_{rad} meist nicht bekannt sind. Andererseits zählen Abstrahlung sowie im Instrument entstehende Verluste als gemeinsame Verluste, wie viel davon tatsächlich abgestrahlt wird oder intern verloren wird kann nicht eindeutig festgestellt werden. Dennoch nochmals aufgerollt und anschließend eine angepasste Lösung für Messergebnisse.

Reflektionsfaktor = Reflektionskoeffizient:

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_c}{Z(\omega) + Z_c}$$

ist per Definition $(Z_L - Z_c) / (Z_L + Z_c)$, komplex dividiert, Z_L immer das letzte Segment der Matrix, daher dann = Z_{rad} .

$$R(\omega) = B/A$$

reflektierte Welle / vorlaufende Welle

$$R(\omega) = -e^{-2jkL}$$

im Fall eines closed – open Zylinders ohne Verluste
max. 2,0 – da stehende Welle

Standing Wave Ratio = Reflektionsfaktor

The voltage component of a standing wave in a uniform [transmission line](#) consists of the forward wave (with [complex](#) amplitude V_f) superimposed on the reflected wave (with complex amplitude V_r).

A wave is partly reflected when a transmission line is terminated with an impedance unequal to its [characteristic impedance](#). The [reflection coefficient](#) Γ can be defined as:

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_f}$$

$$\text{oder } \Gamma = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

f=forward, r =reflected

wobei der Koeffizient eine komplexe Zahl mit Magnitude und Phase der Reflektion darstellt.

Der Reflektionskoeffizient ist:

~ max -1 bei offenen Enden, +1 bei geschlossenen Enden, 0 = keine Reflektion wenn $Z_{rad}=Z_c$
 Betrag $|\Gamma| = \sqrt{(\text{Re } \Gamma)^2 + (\text{Im } \Gamma)^2}$

- $\Gamma = -1$: complete negative reflection, when the line is short-circuited,
- $\Gamma = 0$: no reflection, when the line is perfectly matched,
- $\Gamma = +1$: complete positive reflection, when the line is open-circuited.

The SWR directly corresponds to the [magnitude](#) of Γ .

At some points along the line the forward and reflected waves [interfere](#) constructively, amplitude V_{\max} given by the sum of those waves' amplitudes:

$$\begin{aligned} |V_{\max}| &= |V_f| + |V_r| \\ &= |V_f| + |\Gamma V_f| \\ &= (1 + |\Gamma|)|V_f|. \end{aligned}$$

At other points, the waves interfere 180° out of phase with the amplitudes partially cancelling:

$$\begin{aligned} |V_{\min}| &= |V_f| - |V_r| \\ &= |V_f| - |\Gamma V_f| \\ &= (1 - |\Gamma|)|V_f|. \end{aligned}$$

The voltage standing wave ratio is then

$$\text{VSWR} = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

Resonanzen und Antiresonanzen, VSWR ist immer zwischen >1 und <2, jeweils |Beträge|

Fractional Return after 1 Roundtrip - ist eine Abwandlung der VSWR, Benade: $Q_0 = 1 - F / 1 + F$:

Benade: = $|Z|$ Peak Maxima Magnitude = Wave Impedanz ($\sim Z_c$) * Q_0
 $|Z|$ Peak Minima Magnitude = Wave Impedanz ($\sim Z_c$) / Q_0
 $\rightarrow Q_0 = \sqrt{\text{Peak Magn.}} / \sqrt{\text{Minima Magn.}}$

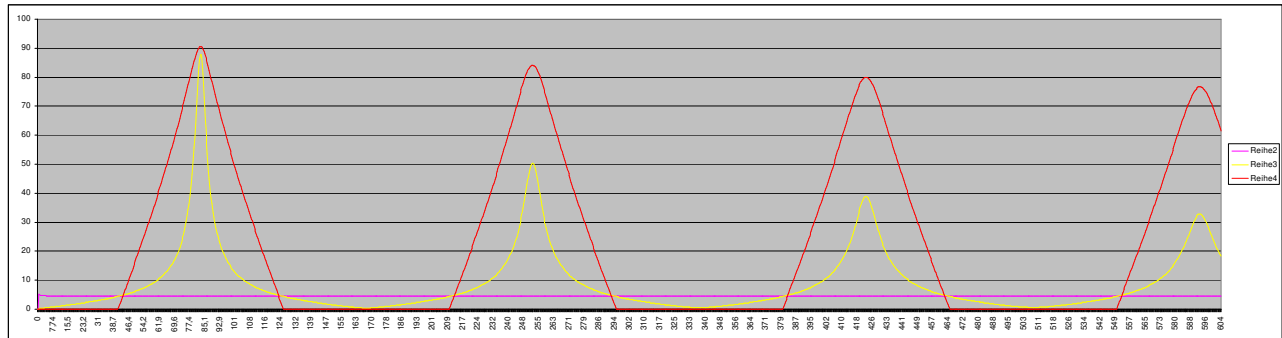
Diese Formel für $Q_0 = \text{Wave Impedanz} \sim Z_c$ kann verwendet werden, wenn Z_c nicht bekannt ist. Bei Blechblasinstrumenten ist das der Fall. Idealerweise kann man aus Minima vor und nach dem Peak einen Magnituden Mittelwert bilden und aus diesem die Wurzel berechnen.

Beim Zylinder wurde die Z_c errechnet, durch Umstellen der Formel ergibt sich der Q_1 -Faktor: $Z_{in}/Z_c = \text{normalisiert}$, gibt Q_1 .

Peak Maxima / Wave Impedanz Z_c = Q_1 Faktor
 $|Z|(\omega) / \text{Wave Impedanz } Z_c$ = Q_1 Faktor, valid um die Peak Frequenzen.

Dieser kann wie folgt verwendet werden um die Verluste nach 1 Roundtrip zu ermitteln, wobei hier Abstrahlung und viskose Verluste enthalten sind (alle Verluste).

es folgt: $a(\omega) = (Q_1 - 1)/2$ $/2 = \text{damit } < 100\%$
 $b(\omega) = a + 1$
 $c(\omega) = 100 / b$
 $d(\omega) = a * c$ = Fraktionaler Return % nach 1 Roundtrip, valid für Peak Maxima.
 Wenn $d(\omega) < 0$; 0; sonst d.



rosa: Betrag Z_c in MOhm, gelb: Betrag Z in MOhm, rot = Fractional Return in %, wir sehen durch Berücksichtigung von Verlusten und einem kleinen Teil Z_{rad} Verluste >10%.

Behandlung von Strahlungswiderstand = Z_{rad} , wenn $\ll ka=1,0$:

Z_{rad} = der Widerstand gegenüber Schallausbreitung vom Raum ausserhalb des Rohres

In linear acoustics, the termination impedance of a tube is called radiation impedance. The acoustic radiation impedance of a tube is a quantity defined as $Z_r = p/U$ where p and U are respectively the acoustical pressure and the acoustical volume velocity at the open end of a tube. The expression of the linear radiation impedance Z_r in the low frequency approximation is given by Levine & Schwinger [7] for an unflanged pipe, Nomura et al. [8] for a pipe with an infinite flange :

$$\frac{Z_r}{Z_c} = \begin{cases} \frac{1}{4}(ka)^2 + jk\delta_0 & \text{unflanged pipe, } \delta_0 = 0.6133a \\ \frac{1}{2}(ka)^2 + jk\delta_\infty & \text{infinitely flanged pipe, } \delta_\infty = 0.8216a \end{cases} \quad (1)$$

where $Z_c = \rho_0 c_0 / S$ is the characteristic impedance with ρ_0 air density, c_0 speed of sound and S surface area of the tube, $k = \omega / c_0$ is the wave number ω being the angular frequency, a is the tube radius, δ_0 and δ_∞ the so-called end length correction for an unflanged tube and a flanged tube respectively. The real part of the radiation impedance represents the radiation loss and the imaginary part represents the inertia.

$Z_{unflanged} \simeq Z_c \{0.25(ka)^2 + j[0.61(ka)]\}$. $Z_{flanged} \simeq Z_c \{0.5(ka)^2 + j[0.85(ka)]\}$.
unendlich dünne Rohrwand, Annäherung *Ein Loch eines Rohres in unendlicher Wand.*
Der Raum selbst müsste auch unendlich sein.

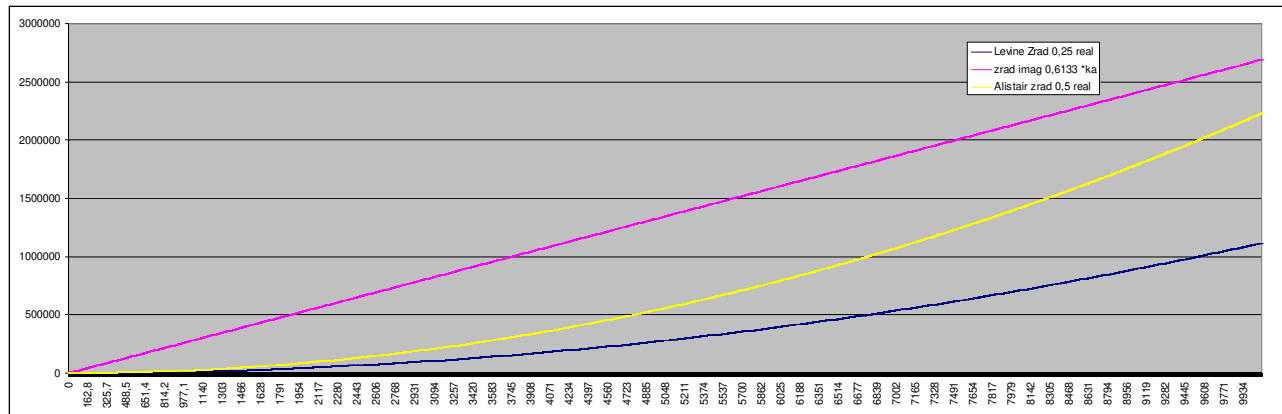
Z_{rad} : $Re = \frac{pc}{S} * \frac{(k*a)^2}{4}$ $/4=360\text{Grad}, /2=180\text{ Grad}=Wand$
 $Im = \frac{pc}{S} * k * a * 0,6133$

$Z_{Rad} = \frac{p}{U} = (\omega * \rho / S) * eL$ $Z_{char} = c * \rho / S$ $w/k=c$
 eL Piston unflanged Baffle = $0,6133*a$ $a=\text{Radius Rohr.}$

Imaginärteil = Länge eines "Luftpropfens" der der angenommenen Träheit entspricht.

$k*a = w/c * \text{Radius Rohr}$. Wenn $k*a$ in die Größenordnung von Z_c gelangt verschwindet jede Reflektion, denn für die Reflektion von Druckwellen ist ein Impedanzunterschied notwendig. Bei Blechblasinstrumenten geschieht das anhand der Hornfunktion schon bei wesentlich geringeren Frequenzen. Insgesamt ist die gesamte Berechnung wesentlich komplexer und nicht vollständig erforscht. Es geht hierbei speziell dann darum, welche Frequenzen sich in welchem Bereich stärker ausbreiten – Abstrahlwinkel, etc. Ich beschreibe momentan nur die Verhältnisse im Rohr, nicht ausserhalb. Ausserhalb eines Rohres erfolgt auch bei einem Zylinder eine sphärische Ausbreitung im Vergleich zu ebenen Wellenfronten (Fernfeld/Nahfeld).

Beim Rohr mit 11mm Durchmesser ohne Schallbecher ergibt sich prinzipiell folgende Situation:



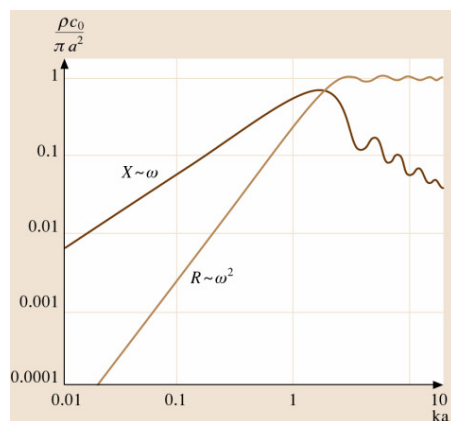
Zrad, imaginäre Anteile stimmen bei den Formeln überein, reale nicht, Dr. Alistair Braden gibt den doppelten Wert an. 0,5* anstelle 0,25* beim Realteil. Ironischerweise ist das bei Frequenzen im Spielbereich völlig uninteressant, es gibt keine nennhaften Abweichungen, sondern erst bei wesentlich höheren Frequenzen.

0,6133 ist valid solange $k*a \ll 1,0$, oberhalb ändern sich Reflektion und Transmission $k*a = 1,0$ ist beim 11mm Rohr bei ~ 10 KHz.

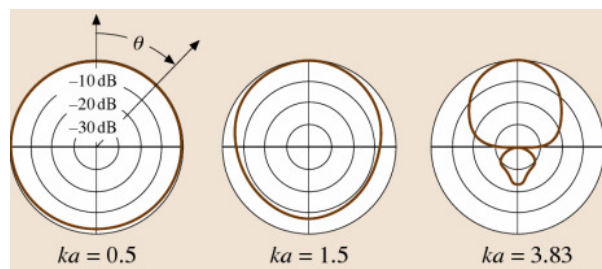
Z_c liegt beim 11mm Rohr bei $\sim 4,3$ Mohm

Z_{rad} erreicht diesen Wert bei ~ 13 kHz.

d.h. erst ab diesem Bereich sollte nichts mehr reflektiert werden können, da $Z_{rad} \sim Z_c$, und das sind Größenordnungen, wo selbst Harmonische so abgeschwächt sein müssten, daß diese in keiner Weise mehr einen Unterschied erkennen lassen können.



$$Z_L = R + jX$$



Intensität und Winkel Abstrahlung

$y = Z_c$ $x = k*a$, $R = \text{Realanteil } Z_{rad}$, $X = \text{Imaginärteil}$
bis $ka=1$ R proportional zu $\sim \omega^2$ und X proportional zu $\sim \omega$

abgestrahlte Energie, wenn $ka \ll 1,0$:

$$P = U_{rms}^2 R_{rad} = \omega^2 \frac{\rho}{8\pi c} (S\omega\xi)^2$$

Acoustic radiation will lower the height and increase the width of resonances in a cylindrical tube. The resulting Q -values can be determined from

$$Q = \omega \frac{\text{stored energy}}{\text{radiated energy}} = \omega \frac{\frac{1}{4} \rho S L \omega^2 \xi^2}{\omega^4 (\rho/8\pi c) S^2 \xi^2} = 2\pi c L / \omega S$$

Verluste innerhalb des Rohres:

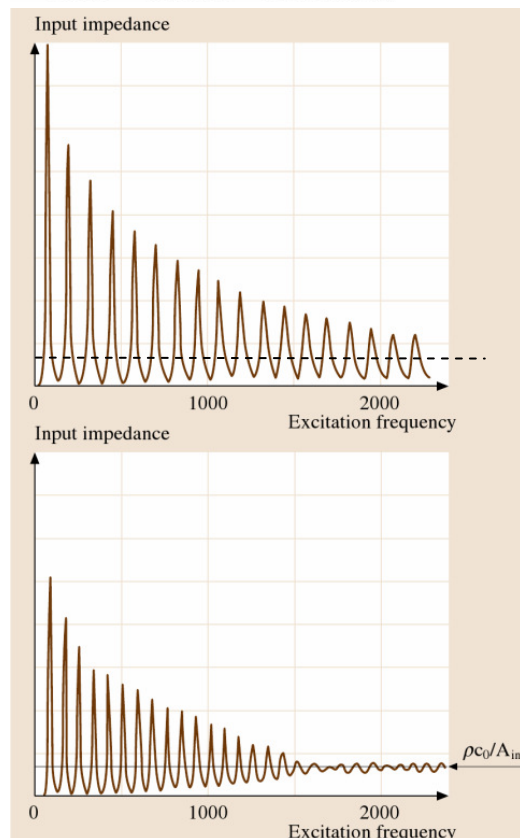
The viscous losses lead to an attenuation of sound waves, which can be described by adding an imaginary component to the k value such that $k' = k - i\alpha$. Waves therefore propagate as $e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)}$, with an attenuation coefficient

$$\alpha = \frac{1}{ac_0} \sqrt{\frac{\eta\omega}{2\rho}} = \frac{k\delta_\eta}{a}$$

In addition, heat can flow from the sinusoidally varying adiabatic temperature fluctuations of the vibrating column of air into the walls of the cylinder. At acoustic frequencies, this takes place over the thermal diffusion boundary length $\delta_\theta = (\kappa/\omega\rho C_p)^{1/2}$, where κ is the thermal conductivity and C_p is the heat capacity of the gas

at constant pressure. In practice, $\delta_\theta \approx \delta_\eta$, as anticipated from simple kinetic theory (for air, the values differ by only 20%). Viscous and heating losses are therefore comparable in size giving an effective damping factor for air at room temperature, $\alpha = 2.2 \cdot 10^{-4} k^{1/2} / a \text{ m}^{-1}$ (Fletcher and Rossing [15.5, Sect. 8.2]). The ratio of the real to imaginary components of k determines the damping and effective Q -value of the acoustic resonances from wall losses alone, with $Q_{\text{walls}} = k/2\alpha$.

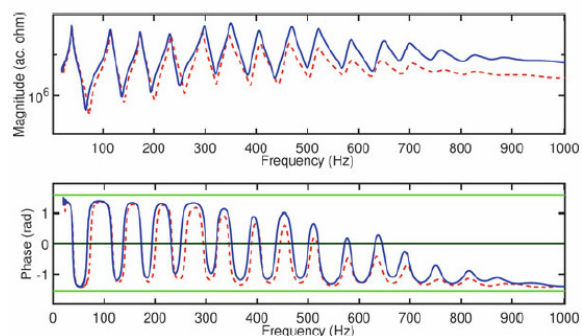
$$\frac{1}{Q_{\text{total}}} = \frac{1}{Q_{\text{radiation}}} + \frac{1}{Q_{\text{wall-damping}}}$$



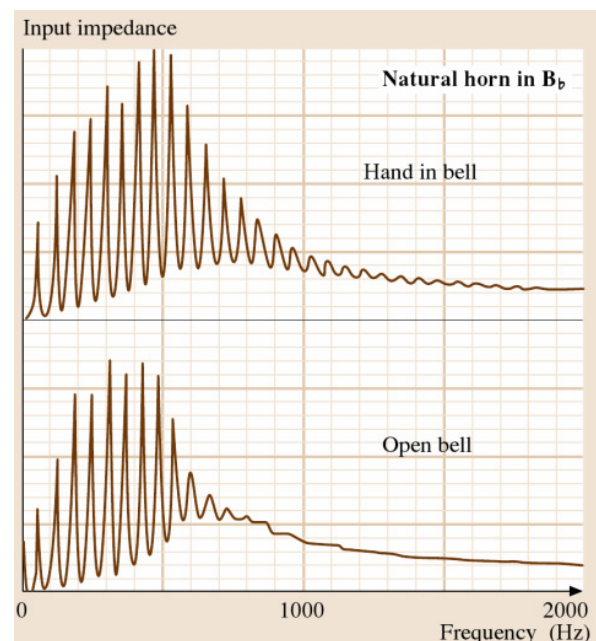
Input Impedanz zyl. Rohr closed-open (oben), mit Trompetenschallbecher, kein MPC (unten)

**** Phasenwinkel nähern sich $-\pi/2$ anhand des „lumped“ Verhaltens des Mundstückvolumens.**

Bassposaune (rot) und Tenorposaune (blau)



*Man beachte Z_c und die Phasenwinkel***



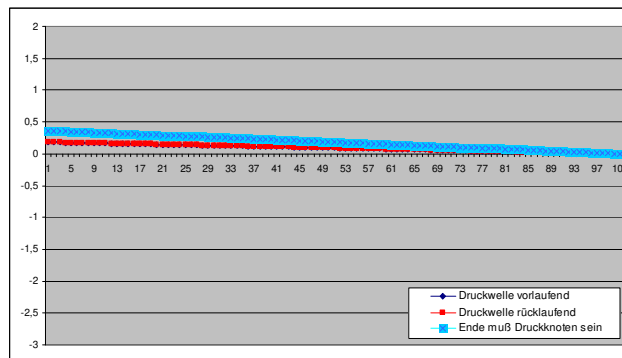
Waldhorn: die Bläserhand ist Teil des Systems. Peaks nahe Z_c = nur noch forward travelling waves

Schwingungen Momentenzustände closed-open Zylinder – Phasen im Zeitraffer:

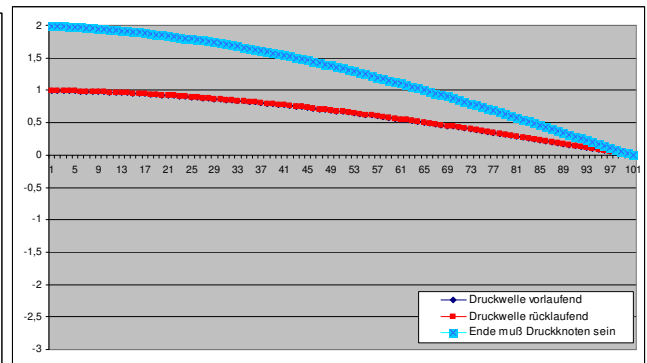
Beispiel links geschlossener, rechts offener Zylinder, Länge 1m, $c=344\text{m/Sek}$; Mode 2

Geschlossene (keine Flussbäuche möglich) und offene Enden (keine Druckbäuche möglich) geben die physikalischen Grenzen = boundary conditions vor, das hat Konsequenzen:

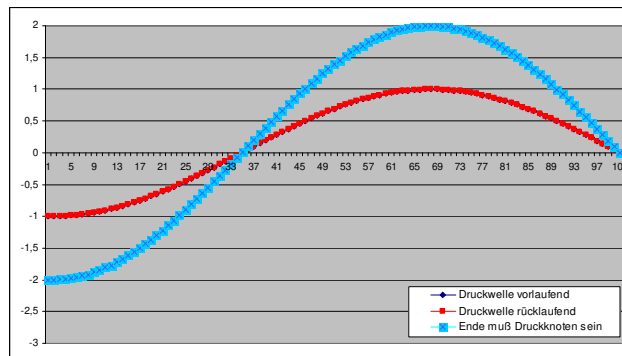
Startet man eine Simulation mit Frequenz $DC=0\text{ Hz}$ und der Annahme, daß am geschlossenen Ende bei Zeit $T=0$ ein +Druckbauch = Überdruck sein soll, mit der Überlegung, daß man hier einen 1. Druck-Impuls einbringt, der 2 vollständige Roundtrips benötigt um wieder auf die selbe Phasenlage zu gelangen, dann ergibt sich im Resonanzfall anhand $\sin(k \cdot L - x)$



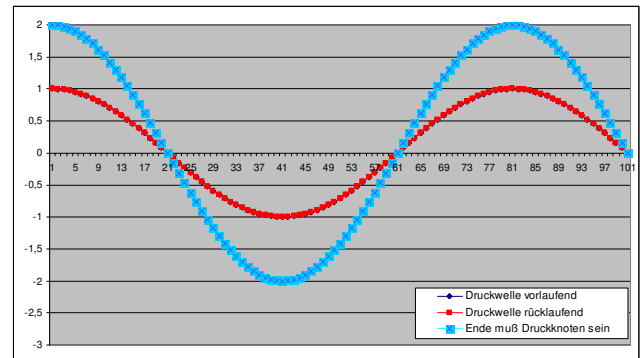
10 Hz dargestellt, da $0 = 0$.



1. Mode ~ 86 Hz, Wellenzahl 0,25



2. Mode ~ 258 Hz, Wellenzahl 0,75



3. Mode ~ 430 Hz, Wellenzahl 1,25

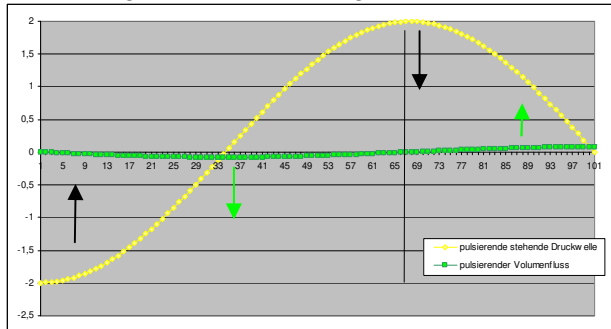
Gerade Mode # starten dann mit einer Unterdruck-Phase 1, wogegen alle Modes einen letzten Überdruckbauch in dieser Phase ausbilden (vorhandene Kurve wird Richtung offenes Ende gestaucht).

Ändert man die Simulation dahingehend, daß mit einem Unterdruckbauch begonnen wird, hätten alle Modes am offenen Ende einen letzten Unterdruckbauch in dieser Phase, und ungerade Mode # jeweils einen Unterdruckbauch am geschlossenen Ende.

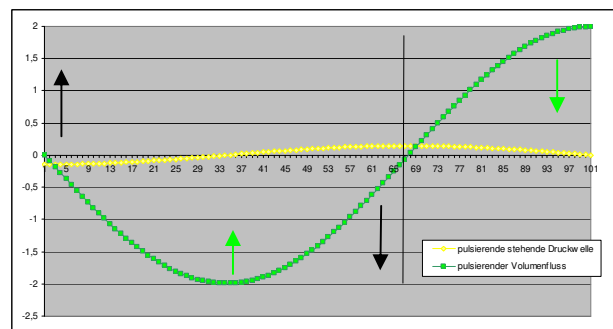
Phase 1+2 und Phase 3+4 sind also abwechselnd vertauscht, was einen Phasenwinkel von 180 Grad oder π , oder $\frac{1}{2}$ Periode oder $\frac{1}{2}$ Wellenlänge entspricht oder einfacher gesagt einem Richtungswechsel $\uparrow \downarrow$.

Am geschlossenen Rohrende kann es keinen abrupten Sprung von +Druck zu -Druck geben, sondern eine solche Änderung muss die Phasen der Schwingung durchlaufen. Allerdings gibt es hier den Richtungswechsel \rightleftharpoons Sprung des Volumenflusses. Welche Konsequenzen das auf das Gesamtsystem inkl. Antiresonanzen hat, versuche ich nun herauszufinden.

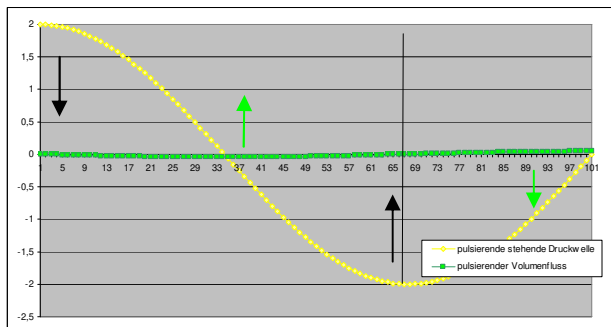
Resonanzfall Mode #2, max. Amplitude aus vor- und rücklaufender Druckwelle (max. +/- 2,0):
Pfeile zeigen ~ die Richtung der nächsten Position



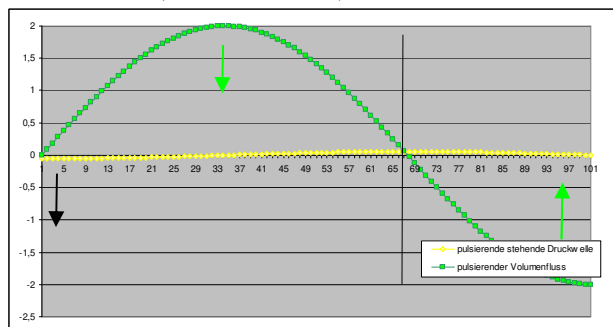
T=0,0 sowie T=1,0 sowie T=2,0 Perioden, usw.



T=1,238 (+ ~1/4 Periode) Phasenwechsel

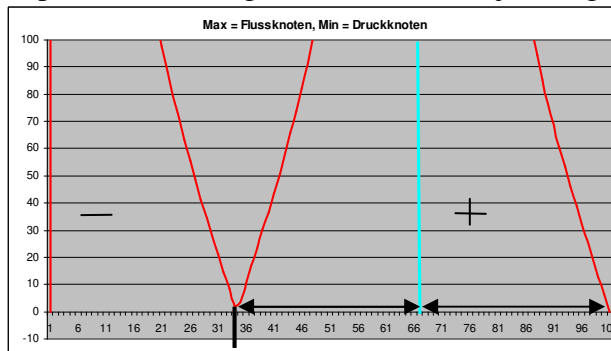


T=1,496 (+ ~1/2 Periode)

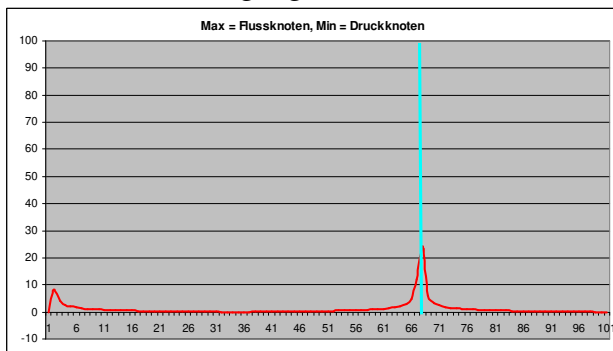


T=1,754 (+ ~3/4 Periode) Phasenwechsel

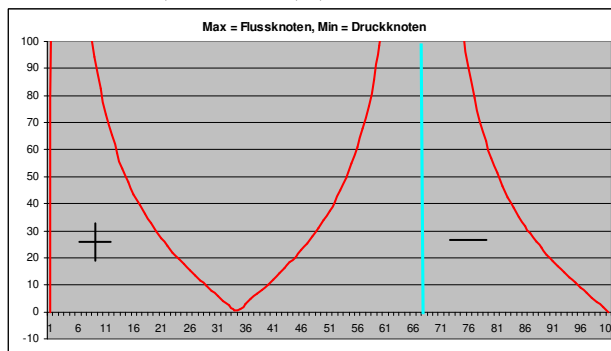
Impedanz Z entlang des Rohres in der jeweiligen Phase der Schwingung:



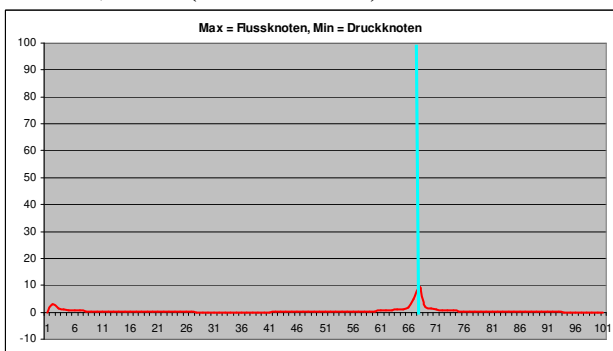
T=0 sowie 1,0 sowie 2,0, etc. ->



T=1,238 (+ ~1/4 Periode) ->

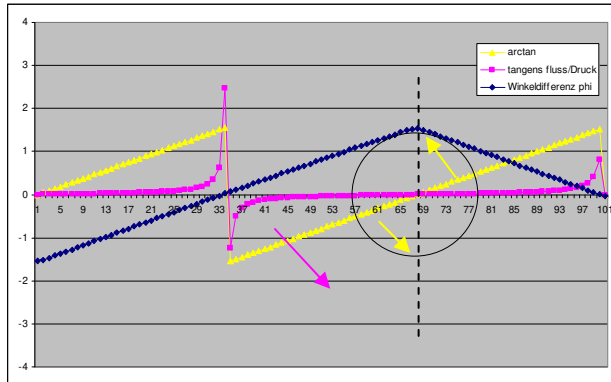


T=1,496 (+ ~1/2 Periode) ->

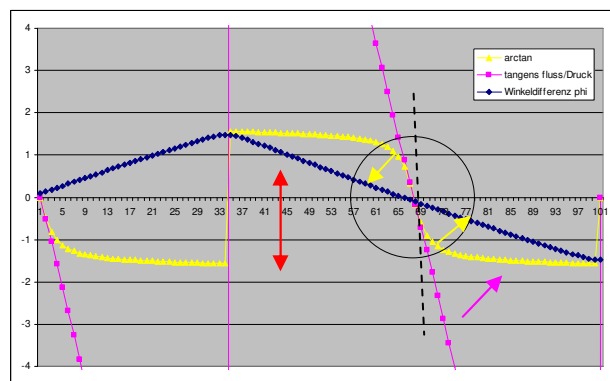
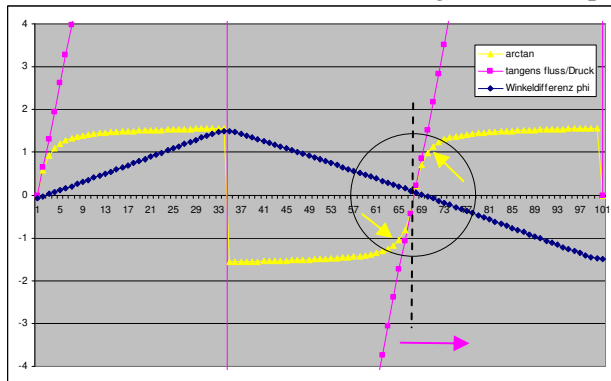


T=1,754 (+ ~3/4 Periode) ->

Ergibt pulsierende Druckbäuche, auch am geschlossenen Eingang. Das offene Ende bleibt ein Druckknoten und ebenso bleiben alle anderen Positionen entlang der x-Achse gleich. Jedes Druckbauchzentrum ist eine ~1:1 Kopie der Bedingungen am geschlossenen Ende, aber jeweils alternierend Unter- und Überdruck.

Winkel und Steigungen, Resonanzfall Mode2:**Fluss Nulldurchgang (Phasensprung Fluss)**

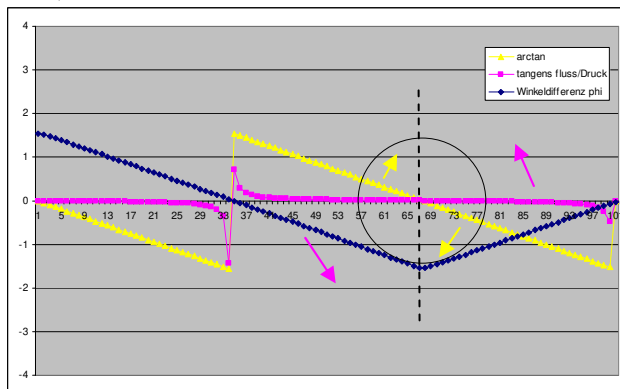
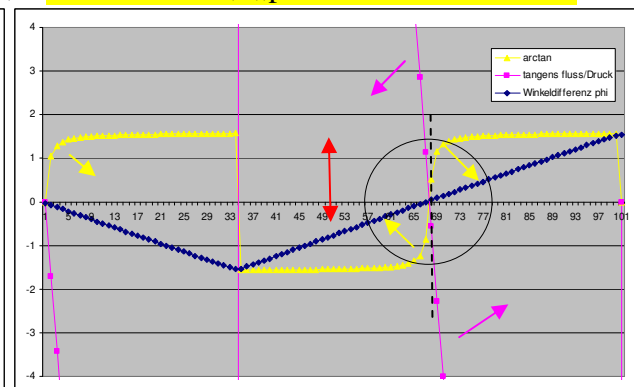
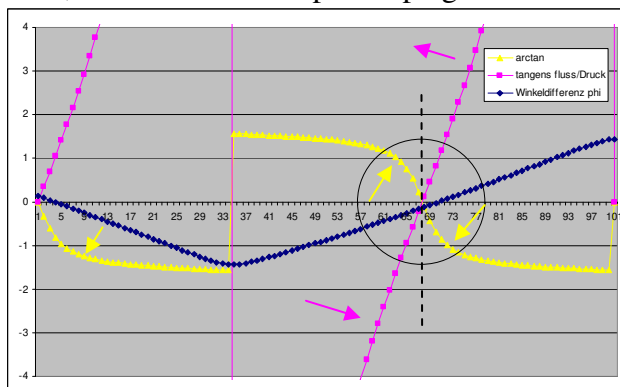
T=0 sowie 1,0 sowie 2,0, etc. Tangens (Steigung) dreht gegen UZS. Winkel Diff. geht nach links.
 Arctan = Winkel Druck zu Fluss steigend, Schnittpunkt bleibt aber, dreht nach links.



T=1,238

nach $\sim 1/4$ Periode **Phasensprung, Druck Nulldurchgang**

T = 1,264

**Defakto kein Fluss (Phasenwechsel Fluss)**T = 1,496 $\sim 1/2$ Periode später Spiegelbild von T0,**Arctan fallend, „pendelt“ ab nun zurück!**

T= 1,7285

 $\sim 3/4$ Periode später **Phasenswechsel**T = 1,754 (+ $\sim 3/4$ Periode)

Nach jeweils $1/2$ Periode kommt es zu einem Vorzeichenwechsel = geänderte Bewegungsrichtung = Phasenwechsel. Phasenwinkel arctan pendelt zwischen -90 und +90 Grad.

Resonanzfall sowie beide Peakflanken, ab dem Minima (even Modes #):

Unterdruck am Eingang Phase 1+2: Tan dreht gegen UZS,
Arctan steigend, + Tan an Flussknoten stets 0,

Arctan dreht gegen UZS

Überdruck am Eingang Phase 3+4: Tan dreht gegen UZS,
Arctan fallend, + Tan an Flussknoten stets 0,

Arctan dreht im Uhrzeigersinn

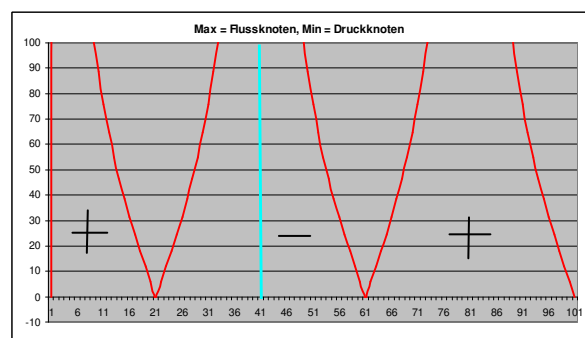
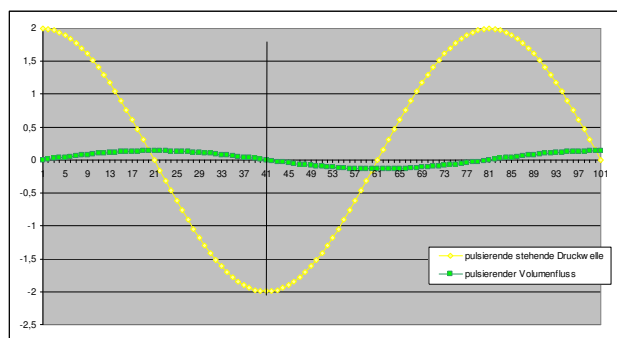
Resonanzfall sowie beide Peakflanken, ab dem Minima (odd Modes #):

Überdruck am Eingang Phase 1+2: Tan dreht im UZS,
Arctan fallend + Tan an Flussknoten stets 0,

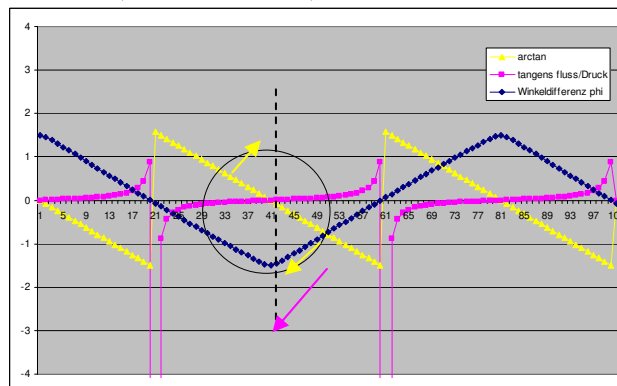
Arctan dreht im UZS

Unterdruck am Eingang Phase 3+4: Tan dreht im UZS,
Arctan steigend, + Tan an Flussknoten stets 0,

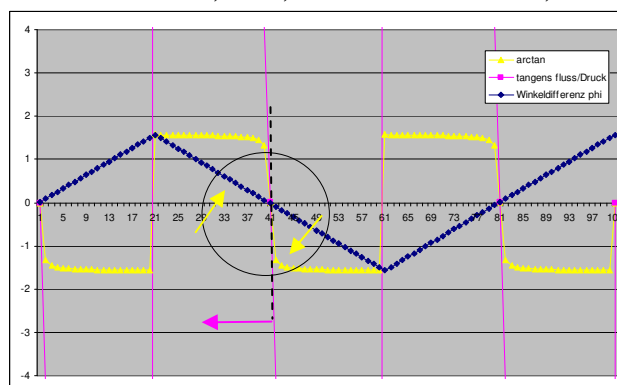
Arctan dreht gegen Uhrzeigersinn



Mode #3, Phase bei T 1,0 = Überdruck

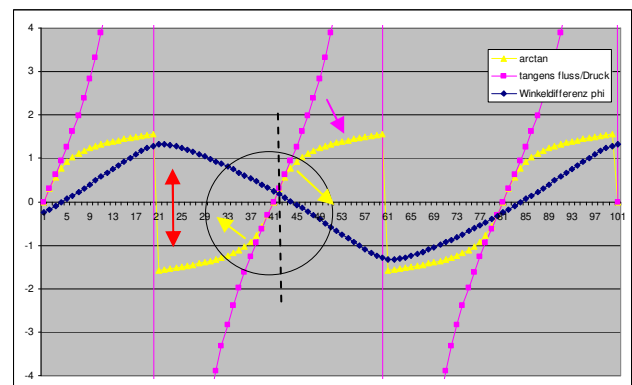


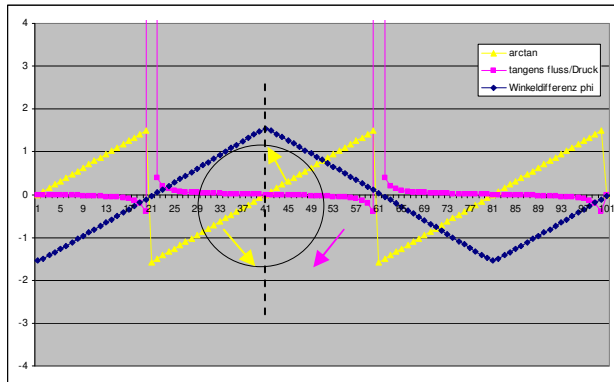
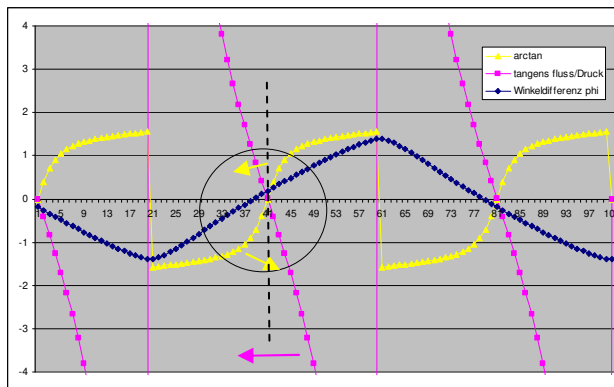
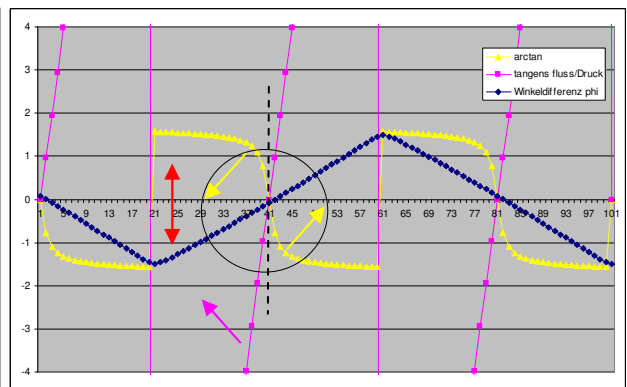
Phase 1 bei T=0, T=1, etc. oder hier T=0,989



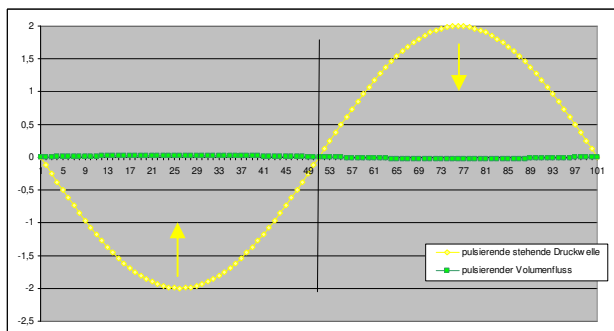
Phase 2 T=1,247

nach ~ 1/4 Periode = Phasensprung = Drucknulldurchgang T=1,29

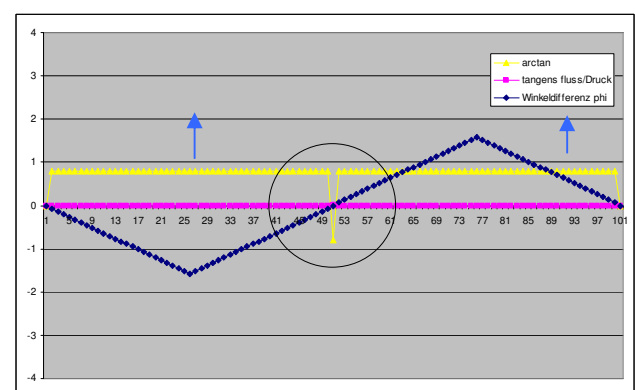


Mode 3, Phase 3 bei $T = 1,505 \sim \frac{1}{2}$ Periode Spiegelbild $T 1,0$ Mode 3, Phase 4 bei Periode $T=1,72$  $T=1,763$ Phasensprung**Anti-Resonanz Fall:**

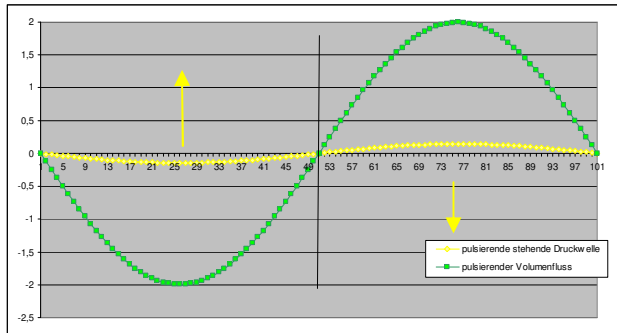
shared Minima 2 (zwischen Mode #2 - Mode #3), even numbered #



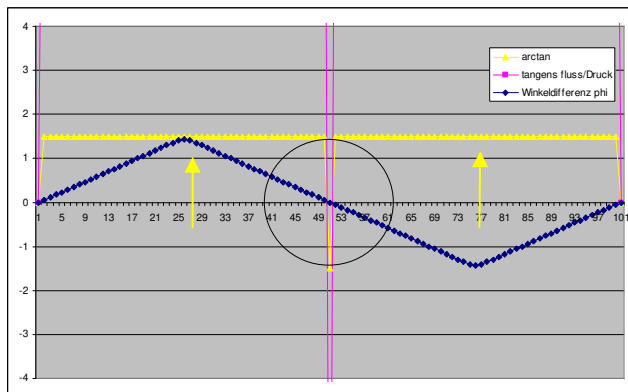
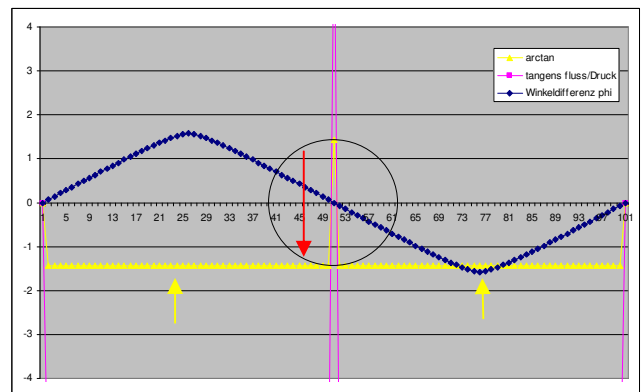
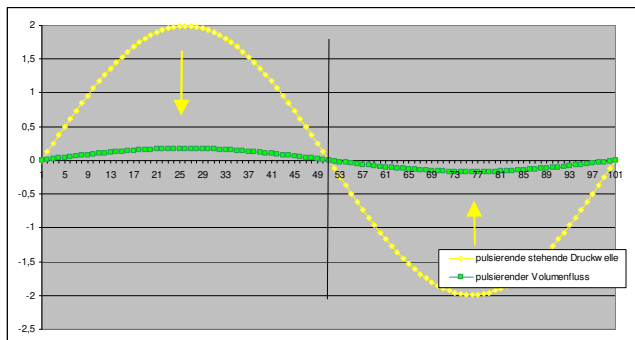
344 Hz, Wellenzahl 1,0

Phase 1, Periode $T=1$, $T = 0,9976$ Tangens = Steigung = **-1,0**Winkel = Arctan (**Tan**) = -45 Grad**Richtungsänderung ohne Phasensprung!**

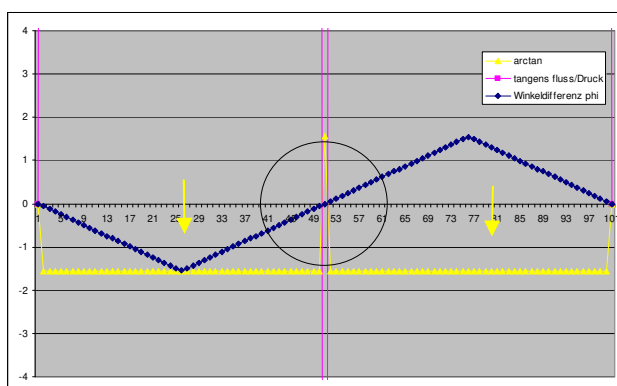
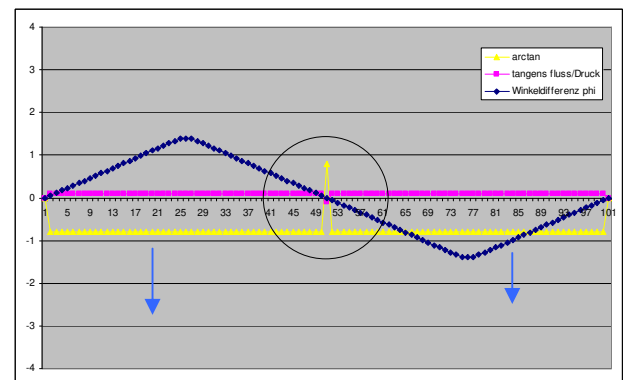
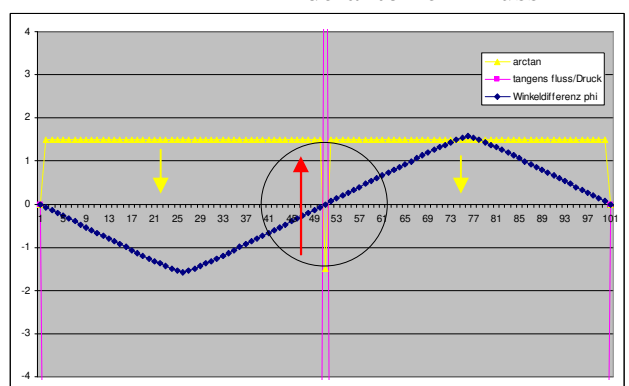
(defakto kein Fluss)

Phase 2, nach $\frac{1}{4}$ Periode, $T=1,2384$

defakto kein Druck = Drucknulldurchgang

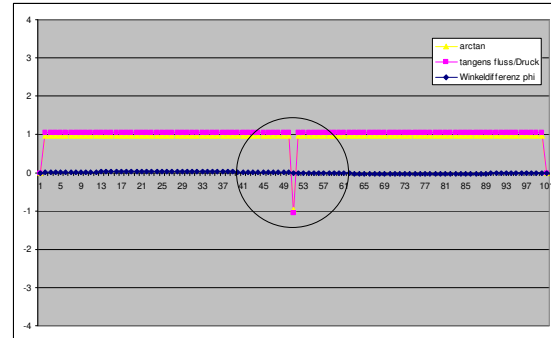
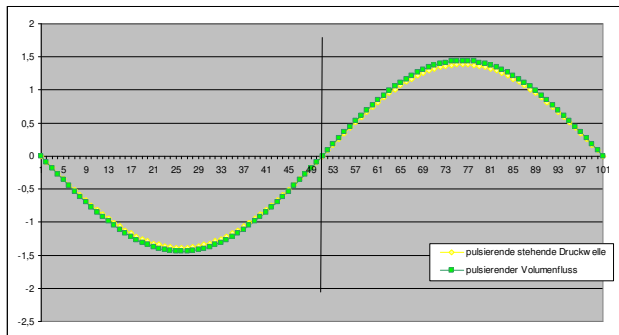
Phase 2, nach $\frac{1}{4}$ Periode $T=1,2384$ Arctan steigt auf beinahe $\pi/2$, $=1,57$ Rad $=+90$ GradPhasensprung ohne Richtungsänderung $T=1,2728$ auf $-\pi/2$ -90 GradPhase 3, nach $\frac{1}{2}$ Periode, $T=1,5136$ Spiegelbild von Phase 1 $\arctan = -\pi/4$ **-Richtungsänderung!**

defakto kein Fluss

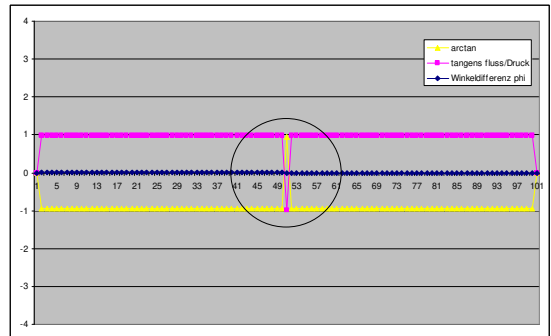
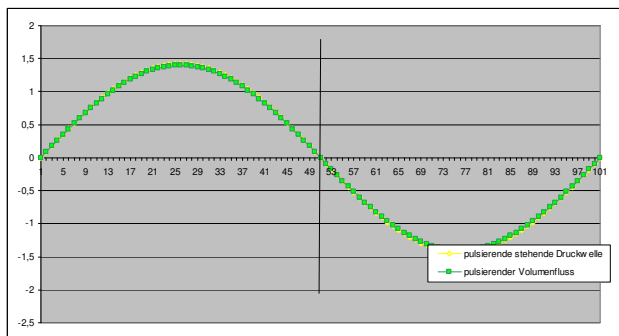
Phase 4, nach $\frac{3}{4}$ Periode, $T=1,747$ Phasensprung ohne Richtungsänderung! $T=1,761$ 

Auch bei geradzahligen Antiresonanz Nummern # sind Phase 1+2 mit Phase 3+4 (180 Grad) vertauscht. Wir haben bei Antiresonanzen jedoch einige Spezialfälle, es kommt 2 mal zu einem Phasensprung ohne Richtungswechsel, nach $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Periode, defakto kein Druck 2 mal zu einem Richtungswechsel ohne Phasensprung nach $\frac{1}{2}$ und $1/1$ Periode, defakto kein Fluss.

2mal, nach $\frac{1}{8}$ und $\frac{5}{8}$ Periode sind Druck und Fluss gleichphasig,
Steigung +1 = +45 Grad = $1\pi/4$ und +225 Grad = $5\pi/4$

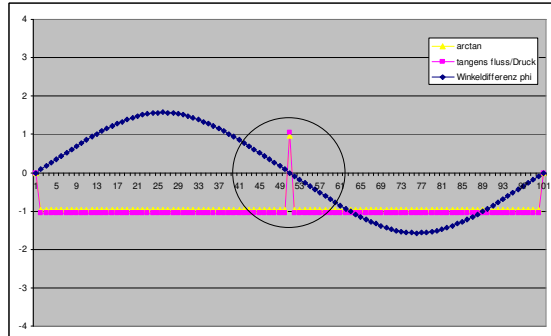
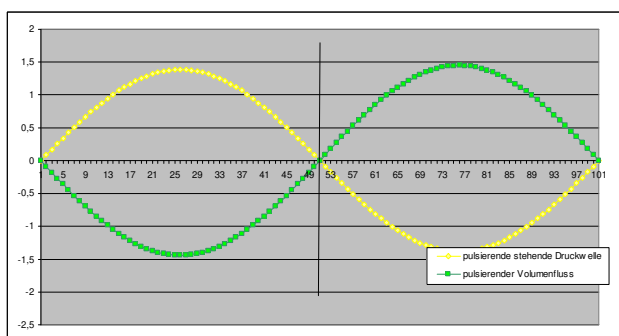


nach $\frac{1}{8}$ Periode 45 Grad

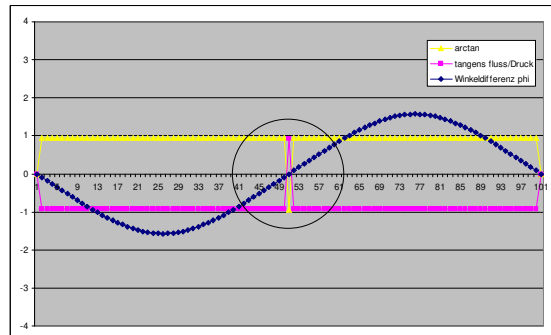
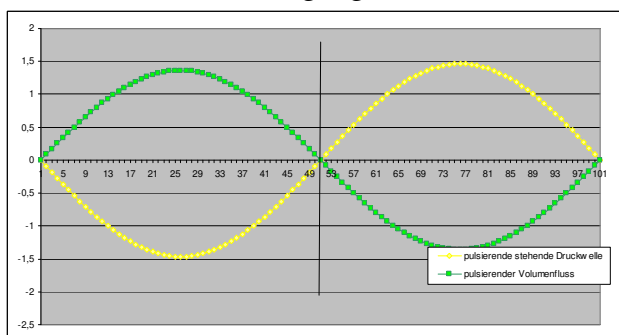


nach $\frac{5}{8}$ Periode 225 Grad (zum Arcustangens muss 180 Grad = $2\pi/2$ addiert werden)

2mal, nach $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ Periode sind Druck und Fluss gegenphasig



nach $\frac{3}{8}$ Periode = Steigung -1 = +135 Grad



nach $\frac{7}{8}$ Periode = Steigung -1 = -45 Grad. (zum Arcustangens muss $3\pi/2$ addiert werden.)

Phasenlage von Frequenzen – Auswertung closed-open Zylinder:

| | | |
|---------------|-----------------|---|
| Resonanzmodes | haben 0,5 WL | Abstand zum nächsten und vorigen Mode = $\pi = 1/2T$ |
| shared Minima | haben 0,5 WL | Abstand zur nächsten und vorigen Minima = $\pi = 1/2T$ |
| folglich ist | jeweils 0,25 WL | Abstand zwischen den Extremen = 90 Grad, bzw. $\pi/2$ |
| | wobei 0,25 WL = | Rohrlänge = $1/4$ Periode T, wenn $c=\lambda*f$, $c=\lambda/T$, $T=1/f$ |

Am offenen Rohrende ergibt sich für Druck = $\sin(0)$ bzw. $-\sin(0)$, bzw. $\cos(1)-90^\circ$ oder $-\cos(1)+90^\circ$
Dadurch wandern mit zunehmender Frequ. = abnehmender Wellenlänge die bereits vorhandenen Kurvenpunkte Richtung offenes Ende – werden quasi gestaucht. Am geschlossenen Beginn müssen in den dadurch freigewordenen Platz zusätzliche Punkte der bereits vorhandenen Funktion angefügt werden, die Funktion selbst kann sich somit nicht ändern!

Es gibt 5 Varianten, die das Verhalten beschreiben, x =Rohrposition, L =Strecke zum offenen Ende):

$$\begin{aligned} & \sin(k * (x-L)) * +\cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad -\sin(k * (x-L)) * \cos(\omega t) \\ & +\sin(k * (x-L)) * -\cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad +\sin(k * (x-L)) * +\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Mit der Variante rechts sind alle Vorzeichen vertauscht und somit wären die Phasen 1+2 mit Phasen 3+4 in der Reihenfolge vertauscht, werden aber genauso oft durchlaufen. Die Reihenfolge ist also 3,4,1,2,3,4,1,2 usw. anstelle von 1,2,3,4,1,2,3,4 usw.

| logisch: | Wellenzahl | Periode bei T=0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4: | | | | Phi° | T Offset |
|----------------|------------|--|-----------------|------|---|------|----------|
| 0 Hz =DC: | 0,00 | kein Druck | kein Fluss | -Sin | 0 | 0 | -1/4T |
| Mode 1 | 0,25 | Druckbauch + | später Fluss -> | +Cos | 1 | 90 | 0 T |
| shared Min.1-2 | 0,5 | Pr Node, Druckbauch+ | aber kein Fluss | +Sin | 0 | 180 | 1/4T |
| Mode 2 | 0,75 | Druckbauch - | später Fluss <- | -Cos | 1 | 270 | 1/2T |
| shared Min.2-3 | 1,00 | Pr Node, Druckbauch- | aber kein Fluss | -Sin | 0 | 360 | -1/4T |
| Mode 3 | 1,25 | Druckbauch + | später Fluss -> | +Cos | 1 | 90 | 0 T |
| shared Min.3-4 | 1,50 | Pr Node, Druckbäuche+ | aber kein Fluss | +Sin | 0 | 180 | 1/4T |
| Mode 4 | 1,75 | Druckbauch - | später Fluss <- | -Cos | 1 | 270 | 1/2T |

Es zeigt sich also, daß verschiedene Frequenzen (unabhängig davon ob es Resonanzfrequenzen sind), sich zur selben Zeit t jeweils in einer anderen zeitlichen Phase ihrer harmonischen Schwingung befinden.

Man kann folgendes systematische Verhalten in einer closed-open Geometrie festhalten:

| | |
|----------|--|
| ungerade | Resonanzmodes (#1,3,5,7 usw.) sind zueinander in Phase |
| gerade | Resonanzmodes (#2,4,6,8 usw.) sind zueinander in Phase, und $1/2$ Periode = $1/2$ Wellenlänge den ungeraden Modes voraus – das zu jeder Phase=Zeit, d.h. sie verhalten sich gegenteilig zu ungeraden Resonanzmodes, Modes gleicher Phase verhalten sich gleichartig! |
| ungerade | Antiresonanzen (shared Impedanz Minima) Mode1-2, 3-4, 5-6, etc. sind zueinander in Phase sowie jeweils $1/4$ Periode = $1/4$ WL = 90 Grad oder $\pi/2$ von Nachbarmaxima entfernt. |
| gerade | Antiresonanzen (shared Impedanz Minima) Mode DC-1, 2-3, 4-5, 6-7, etc. sind zueinander in Phase, sowie jeweils $1/4$ Periode = $1/4$ WL = 90 Grad oder $\pi/2$ von Nachbarmaxima entfernt, und $1/2$ Periode = $1/2$ WL = 180° zu ungeraden Minima versetzt, das zu jeder Phase=Zeit, d.h. sie verhalten sich gegenteilig zu ungeraden Minima! |

Resonanz, sowie beide vollständigen Peakflanken:

| | |
|------------|--|
| Phase 1+3: | kein Fluss = +/- Phasenwechsel Fluss, max. Druck = Richtungsänderung Druck |
| Phase 2+4: | kein Druck = +/- Phasensprung Druck, max. Fluss = Richtungsänderung Fluss |
| | Tangens und arctan ist an Flussknoten immer 0. |

Antiresonanz:

| | |
|------------------|---|
| Phase 1+3: | kein Fluss = <u>kein</u> Phasensprung Fluss, beidseits Druckknoten, Richtungsänderung Druck |
| Phase 2+4: | kein Druck = +/- Phasensprung Druck, max. Fluss, <u>keine</u> Richtungsänderung Fluss |
| jede $1/2$ Phase | dazwischen abwechselnd: Druck und Fluss in gleicher Phase und entgegengesetzter Phase |

Betrachtet man mehrere Frequenzen nebeneinander (z.b. in einem Impedanz Plot), oder betrachtet Druckverlaufkurven, haben **Über-** und **Unterdruck**, bzw. Flussrichtung **vor** und **zurück** und die einzelnen Phasen einer Schwingung selbst scheinbar keine Bedeutung mehr, bzw. können wir die Phasen nicht mehr herauslesen. Für diese Beträge wird 1 Periode benötigt und die negativen Werte entfernt, denn diese sind nur ein Spiegelbild der positiven Beträge und wir hätten dennoch keine Information zu welcher Phase die Beträge entstanden wären. Wir haben 2 übereinander gelegte $\frac{1}{2}$ Phasen zur Zeit $T=0$ und $T=0,5$. Das selbe Bild ergibt sich auch bei T_1 , $T_{1,5}$ T_2 , T_{1000} usw. Dieser Ansatz ist druckschwankungs-behaftet, denn das ist die Größe die wir messen können. Wären Momente von $T_{0,25}$ und $T_{0,75}$ gewählt, hätten wir die Flusszustände, hätten wir jede andere Kombination, die immer um $1/2T$ versetzt übereinander gelegt wird, hätten wir ohne Angabe der Phase – z.b. als Winkel – ein Informationsdefizit.

Diese sind zu positiven Zahlen, den Beträgen verschmolzen, ich bezeichne es nun als Potential, wobei ich auch kinetische Energie (Volumenfluss) als Potential bezeichne. Impedanz ist das Verhältnis von potentieller zu kinetischer Energie. Als Blechbläser sind wir an Impedanzmaxima interessiert, also viel potentieller Energie (Druck) bei wenig kinetischer Energie (Volumenfluss). Die Gesamtenergie ist $\text{pot.} + \text{kin.} - \text{Reibung}$.

Es gibt Druckmaxima, Flussmaxima und jeweils Knoten davon – aber keine Minima – Das jeweilige Potential wird an Knoten = Nulldurchgänge minimal, genauer gesagt verschwindet der Realanteil, die Komponente ist vorübergehend rein imaginär. Genauso gibt es Druck/Fluss = Impedanz als Magnituden-Maxima die immer positiv sind, und eventuell eine gemessene oder berechnete Phasendifferenz als Winkel. Dennoch sprechen wir von Impedanzminima, diese sind nicht negativ und keine „Impedanz-Knoten“, sie liegen auch nicht auf einer Null-Linie.

Es zeigt sich aber bei Perturbationen, daß diese Herleitung der gemeinsamen Attribute anhand der Phasenlage viele systematisch auftretenden Effekte erklären kann. Es gibt also einige Phänomene weniger!

Situation einer Anregung unter oder über einer lokalen max. Resonanzfrequenz eines Rohres:

Vollständig „In Phase“ = gleiche Wellenform zur selben Zeit oder vollständig „out of Phase“ = gleiche Wellenform, aber mit $\frac{1}{2}$ Wellenlänge Zeitdifferenz = 180 Grad gegeneinander gedreht können nur Frequenzen sein, die wir als Antiresonanzen definieren. Alle anderen Frequenzen können diese Zustände niemals erreichen.

Resonanzmaxima finden sich somit bei Frequenzen, wo Druck- und Flusswellen 90 Grad zueinander versetzt sind. Am geschlossenen Ende eilt der Druck dem Fluss um 90 Grad vor (ungerade Modes) oder um 90 Grad nach (gerade Modes, 1 Roundtrip Differenz). Dazwischen liegen Antiresonanzen, hier eilt der Druck weder vor noch nach, was einfach bedeutet, daß zugleich Druck- und Flussknoten an beiden Ende liegen.

Was passiert, wenn die Resonanzfrequenz des Rohres nicht der gewünschten Anregungsfrequenz und versa entspricht? Wir wissen, dann gibt es eine starke Dämpfung, je größer die Abweichung ist. Andererseits habe ich gezeigt, daß Antiresonanzen $\pm \frac{1}{4}$ Periode bzw. Wellenlänge von Resonanzmaxima entfernt sind. Das entspricht einer Phasendifferenz von -90 Grad zum tieferen Minimum und + 90 Grad zum nächst höheren Minimum, sofern das Rohr nicht bereits durch andere Umstände „out of phase“ ist.

Zudem sind die Begriffe Resistance = Widerstand, Compliance=Federsteifigkeit und Inertia = Trägheit als physikalische Komponenten für Kräfte und Energie in einer Welle die aus einer Luftschwingung in einem Rohr dargestellt worden. Ein realer Widerstand ist immer vorhanden, das Kräfteverhältnis von Compliance zu Inertia bestimmt die Impedanz. Bei Antiresonanzen sind diese entgegengesetzt so groß, daß sie sich gegenseitig aufheben, es bleibt der reale Widerstand.

Der **Phasenwinkel** Druck-Fluss = Zeitunterschied ist an der **aufsteigenden linken Peakflanke positiv** und hat folglich die Attribute **+I Trägheit** und **-C Steifigkeit**, an der **abfallenden rechten Peakflanke negativ** und hat folglich die Attribute **-I Trägheit** und **+C Steifigkeit**. Bei Minima ist $-I + C = 0$, bzw. $I/C = 1$. Trägheit und Federsteifigkeit sind Eigenschaften, aber keine physikalischen Größen wie der Druck (Kraft pro Fläche) und Geschwindigkeit (Strecke pro Zeit)!

Als Versuchsbeispiel nehme ich Resonanzmode #3,

430 Hz, Wellenzahl = 1,25 $\frac{1}{4}$ Wellenlänge = 0,2m und $\frac{1}{4}$ Periode = 0,5812 ms

Phase 1 beginnt bei ungeraden Modes mit einem Druckbauch $\cos(0) = +1$

Das shared Minima 2-3 darunter ist gerade, #2

344 Hz, Wellenzahl = 1,0 $\frac{1}{4}$ Wellenlänge = 0,25m und $\frac{1}{4}$ Periode = 0,7267 ms

Phase 1 beginnt bei geraden Minima mit einem $-\sin 0=0$, es sind -90 Grad Diff. zur Maxima.

Was ändert sich gegenüber der Resonanzfrequenz, wenn die Anregung um $\frac{1}{8}$ Wellenlänge tiefer stattfindet?

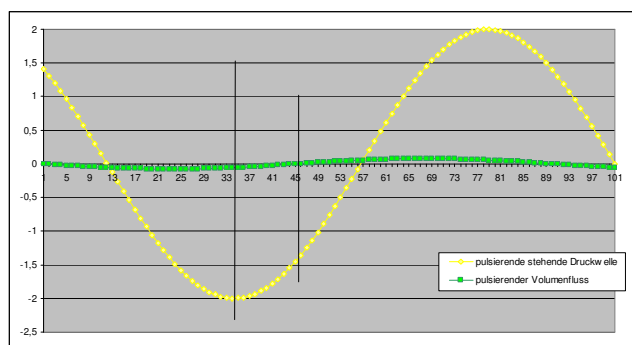
Das wäre eine versuchte, gedämpfte tiefere Schwingung, die genau in der arithm. Frequenzmitte liegt.
Frequenz 387 Hz, Wellenzahl 1,125 $\frac{1}{4}$ Wellenlänge wäre 0,222 m $\frac{1}{4}$ Periode = 0,6460 ms

Es müssen sich +45 Grad Differenz gegenüber Sinus ergeben; $\arctan(\tan(kL)) \cdot 1 = +45,0$.

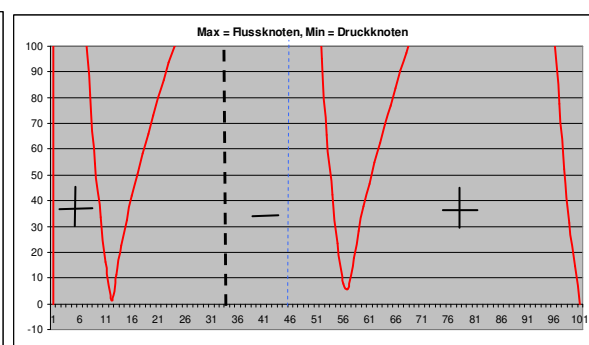
Das ist der Winkel am Punkt $x=0$ der Druckkurve, da Fluss gleich 0 = Winkel = 0, ist es die Differenz.

Die Druckmagnitude bei x_0 , $T_0 = 1,4142$ anstelle max 2,0 $(-2\sin(k \cdot (x_0-L)) \cdot \cos(\omega t))$.

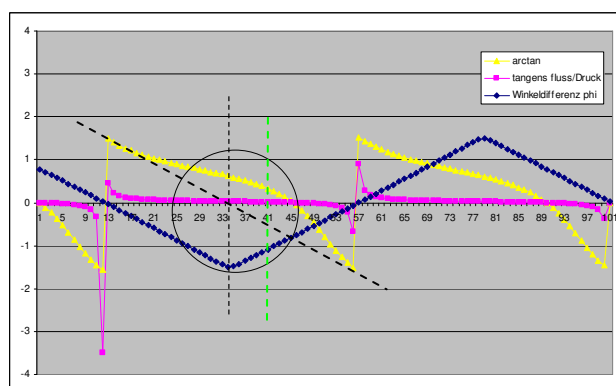
Dem ersten Druckbauch am geschlossenen Ende fehlen $\frac{1}{8}$ Wellenlänge = 0,111m gegenüber der Maxima, der 2. Druckbauch liegt bei 0,334m. Flusskurven sind nicht verschoben, der 2. Flussknoten liegt somit bei $2 \times \frac{1}{4} WL = 0,444m$ (als ob das Rohr sowieso „ideal“ länger wäre!) Es gibt also eine Differenz von Druckbauch zu Druckknoten von 0,111m. Wir müssen daher den Rohrbereich $x=0,3$ bis 0,45m beobachten.



Phase T=1,0

 $\frac{1}{8}$ WL unter Resonanzfrequ.

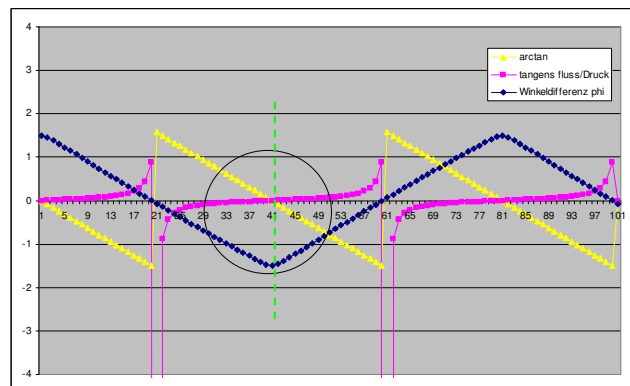
schwarz: Druckbauch, blau: Flussknoten

Phase T=1,006 $-\frac{1}{8}$ WL

es gibt hier eine deutliche Abweichung beim Arcustangens

dieser kreuzt beim Flussknoten;

nicht mehr gleich Druckbauch, dieser ist bei 33,3cm

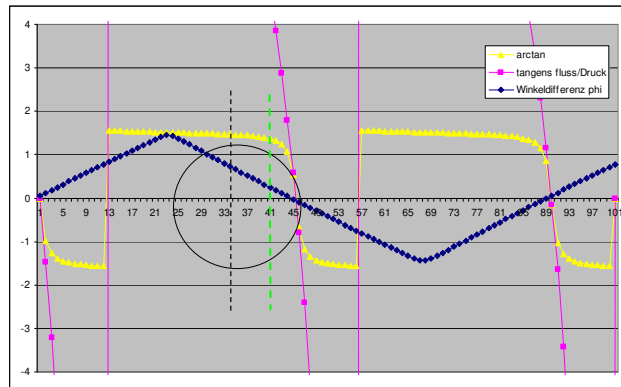
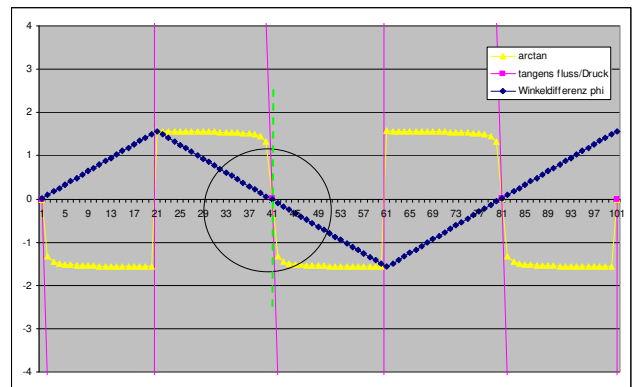
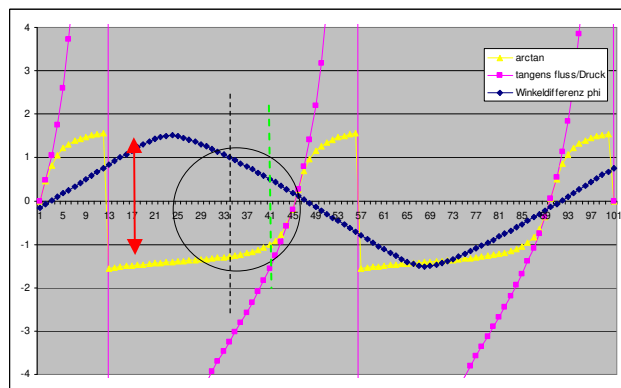
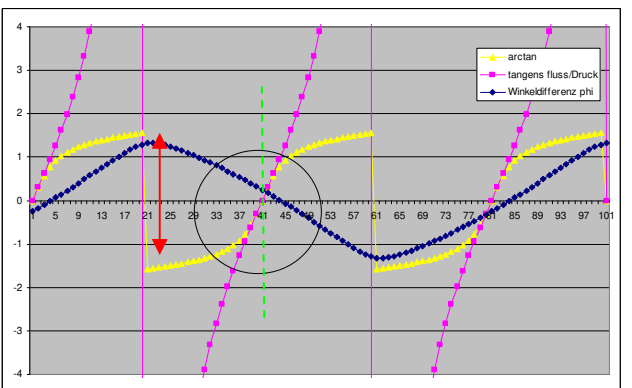
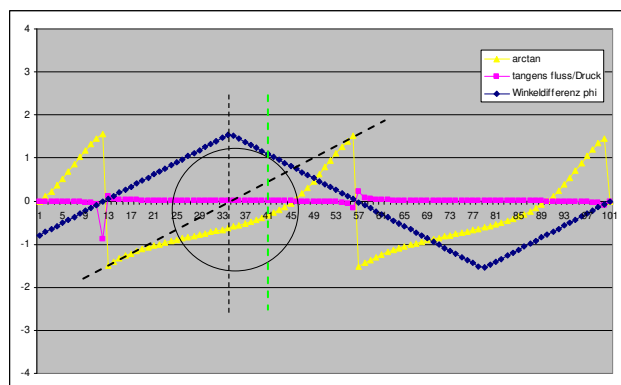
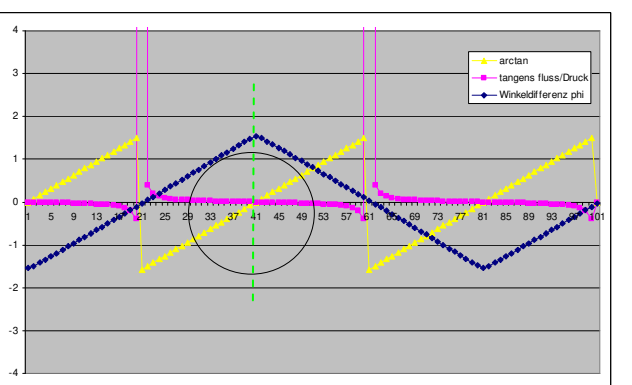


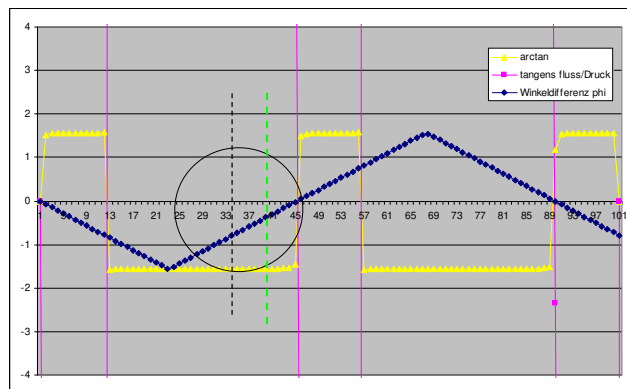
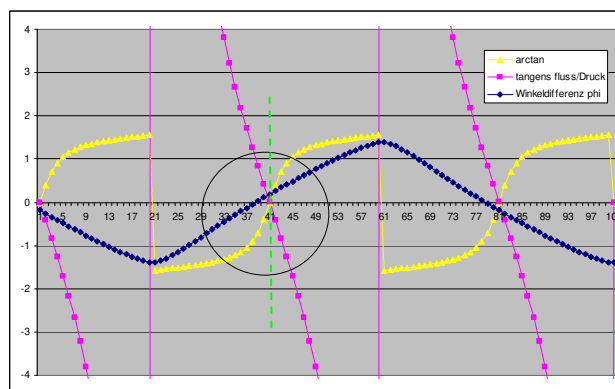
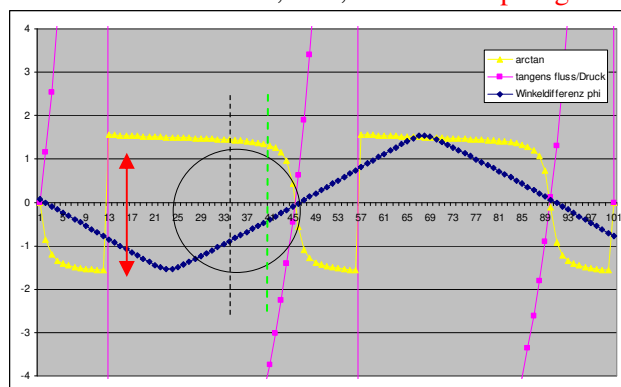
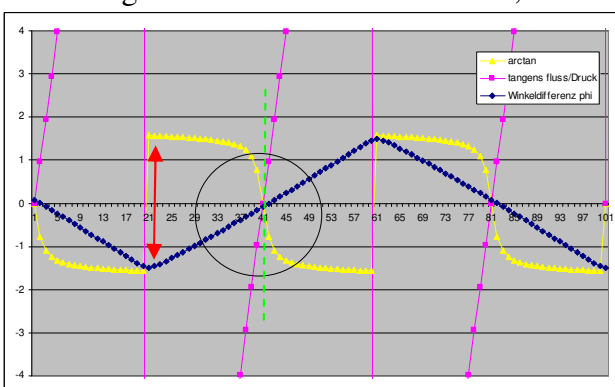
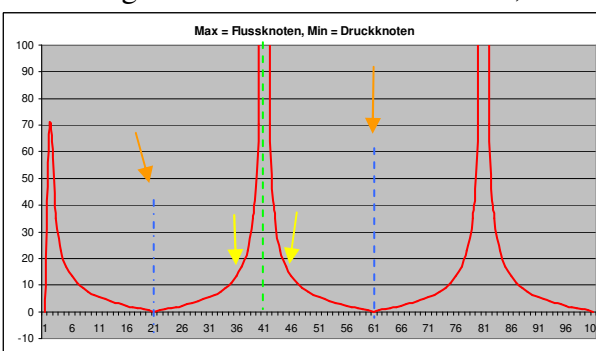
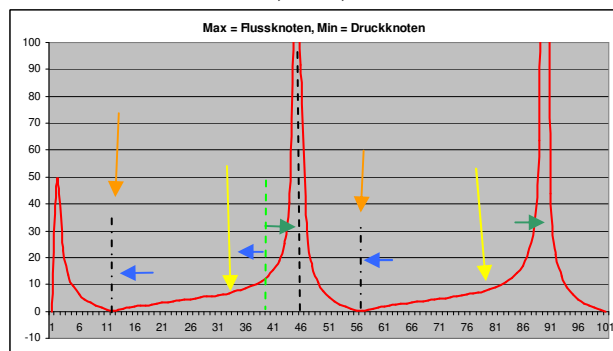
im Vergleich: Resonanzmode #3 T=0,989

jeweils grün strichliert: Flussknoten Mode #3

beim Resonanzmode ebenfalls der Druckbauch

Arcustangens ist dort 0° , wo Flussknoten liegen, dort wird Z anhand einer Restdruckdifferenz maximal. Arcustangens ist dann unendlich (Phasensprung bei 90° von + zu - und -90° von - zu +) wo Druckknoten sind, hier ist Z dann minimal (kein/kaum Druck zu Restfluss). Phasen der Bäuche hier spielen keine Rolle!

nach einer $\sim 1/4$ Periode, $T=1,2384$ -> **Phasensprung**im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=1,247$ nach einer $\sim 1/4$ Periode, $T=1,284$ im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=1,29$ nach einer $\sim 1/2$ Periode, $T=1,501$ im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=1,505$

nach einer $\sim 3/4$ Periode, $T=1,749$ **Phasensprung**im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=1,73$ nach einer $\sim 3/4$ Periode, $T=1,764$ im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=1,763$ Impedanzmagnitude Z bei $T=1/8=0,125T$

Druckbäuche \leftarrow tiefere Frequ. \leftarrow Flussknoten \rightarrow , Druckbäuche = Flussknoten
 und Druckknoten \leftarrow und Flussbäuche Druckknoten = Flussbäuche

Z : max. bei Flussknoten anhand Restdruck, **gelb: Restdruck Druckbauch** (egal ob +/-)!
 min. bei Druckknoten anhand Restfluss!

im Vergleich: Resonanzmode #3 $T=0,1204$ **Fazit tiefere Anregungsfrequenz:**

Beide Kurven folgen der Idee, daß das Rohr länger wäre – als es aber ist.

Druck wird vom offenen Ende aus berechnet \leftarrow , Fluss vom geschlossenen Ende, \rightarrow das gibt Versatz!

Die Abstände von Druck zu Fluß und umgekehrt sind stark aus der arithmetischen Mitte verschoben.

Die Druckbäuche sind stark \leftarrow gegen die auch versetzte \rightarrow Flusskurve verschoben.

Flussknoten sind dort, wo sie in einem $+1/8$ WL passend längeren Zylinder auch wären, weiter am offenen Ende gegenüber der Resonanzfrequenz (maximaler Betrag am Ende natürlich reduziert)!

Druckbäuche und Druckknoten sind aber bei der $+1/8$ WL tieferen Frequenz, d.h. früher, weiter Richtung closed End im unpassenden (zu kurzen) Zylinder. \leftarrow . (=weniger Potential).

Anhand der Formeln kann es ja auch gar nicht anders sein, aber sehr überraschend einfach!

Aufsteigende Flanke: Druck der tieferen Frequenz = weniger, Fluss der höheren Frequenz = mehr

Bei zu hoher Anregungsfrequenz passiert das Gegenteil:

Das shared Minima 3-4 darüber ist ungerade, #3

516 Hz, Wellenzahl = 1,5 $\frac{1}{4}$ Wellenlänge = 0,166m und $\frac{1}{4}$ Periode = 0,4845 ms

Phase 1 beginnt bei ungeraden Minima mit einem Sinus = es sind 90 Grad Diff. zur Maxima.

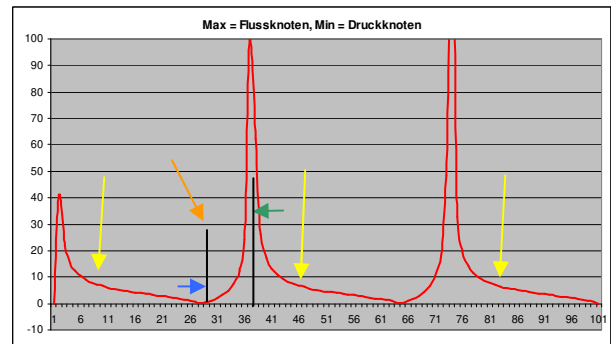
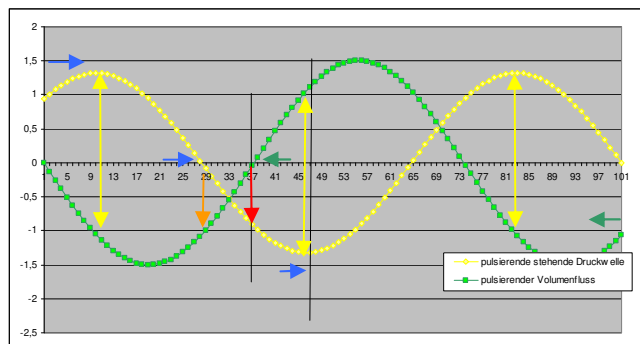
Das wäre eine versuchte, gedämpfte höhere Schwingung, die genau in der arithm. Frequenzmitte liegt.
Frequenz 473 Hz, Wellenzahl 1,375 $\frac{1}{4}$ Wellenlänge wäre 0,182 m $\frac{1}{4}$ Periode = 0,5285 ms

Es müssen sich -45 Grad Differenz ergeben; $\arctan(\tan(k * L)) = -45,0$. (bei 90° ist Sprung auf -90°)

Das ist der Winkel am Punkt $x=0$ der Druckkurve, da Fluss gleich 0 = Winkel = 0, ist es die Differenz.

Die Druckmagnitude bei x_0 , $T_0 = 1,4142$ anstelle max 2,0 $(-2\sin(k * L) * \cos(\omega t))$.

Der 1. Druckbauch am geschlossenen Ende ist $\frac{1}{8}$ Wellenlänge = 0,092m gegenüber der Maxima zu lang, der 2. Druckbauch liegt bei 0,454m. Flusskurven sind nicht verschoben, der 2. Flussknoten liegt somit bei $2 \times \frac{1}{4} WL = 0,364m$ (als ob das Rohr sowieso „ideal“ kürzer wäre!) Es gibt also eine Differenz von Druckbauch zu Druckknoten von -0,09m. Wir müssen daher den Rohrbereich $x=0,36$ bis 0,46m beobachten.



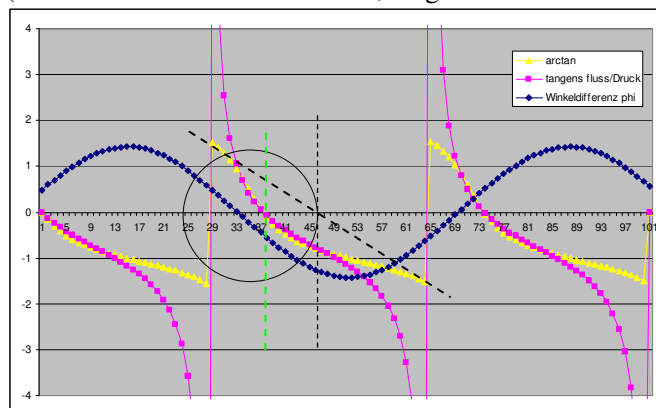
Anregung um $\frac{1}{8}$ WL höher als Resonanzfrequenz, bei zufällig gewählter $T = 0,135$

Flussknoten sind nun Richtung geschlossenes Ende \leftarrow verschoben,

Druckbäuche und Druckknoten Richtung offenes Ende \rightarrow .

Z: ist am höchsten wo ein Flussknoten ist, da hier der vorhandene Druck des Druckbauches schlagend wird, wo die Druckbäuche sind (egal ob Über- oder Unterdruck) ist Z immer noch erhöht, danach ergibt sich die flach abfallende Kurve bis zum nächsten Druckknoten.

(Bei $x=0$ ist immer ein Artefakt, wegen Division/0 t und x gleich 0.)



Tangens und Arcustangens „kleben“ wie auf der anderen Peakseite an Flussknoten, Steigung und Winkel stets 0. Warum: Weil am geschlossenen Ende per Definition immer Flussknoten sind $= \sin$ von $0 = 0$.

Die jeweiligen Phasensprünge müssen an Knoten stattfinden (Übergang \pm), Druckbäuche und Flussbäuche scheinen bei Betrachtung der Phasenwinkel sowie der Impedanz Z in der Bedeutungslosigkeit zu versinken!

Die Abstände sind in die andere Richtung stark verschoben, es erübrigen sich daher weitere Grafiken. Der Fluss ist näher am closed End <--, als ob er in einem kürzeren, passenden Rohr wäre, man könnte sagen „es hat ihm keiner gesagt, daß er in einem zu langen Rohr unterwegs ist.“

Druck bei höherer Frequenz ist weiter am open End --> im momentan unpassend (zu langen Rohr). Der Druck hat es erst beim 1. Roundtrip erfahren :)

Mehr Trägheit ist eine Eigenschaft – keine physikalische Grösse kann mit gesteigertem Druckpotential und zunehmende Federsteifigkeit mit gesteigertem Flußpotential gleichgesetzt werden. An aufsteigenden Flanken muß also Trägheit gegenüber dem Minima zuvor immer mehr zunehmen = zunehmend weniger Fluss, das ermöglicht zunehmend mehr Druck, das Verhältnis der beiden = Impedanz = Z Betrag ändert sich.

An absteigenden Flanken muss es umgekehrt sein, zunehmend weniger Druck ergibt zunehmend mehr Fluss. Wir haben gesehen, daß sich diese Eigenschaften durch das Verschieben der lokalen Druck- und Flusskurven ergeben. Daraus ergibt sich eine globale Aussage: Impedanz Minima sind Restfluss, Impedanzmaxima samt der gesamten Flanken sind Restdruck. Umso mehr Rest vorhanden ist, um so stärker sind diese ausgebildet. In der arithmetischen Mitte ergibt sich maximaler Rest für Z Betrag.

Interessant für mich ist, daß ich keine „Antiresonanz“ Domänen gefunden habe, ich habe aber die charakteristische Impedanz des Rohres bei den Berechnungen bisher unter den Tisch fallen lassen, ebenso Verluste durch Reibung und (etwas) Abstrahlung.

Es ging in diesem Kapitel um Phasen, und speziell um Winkel.

Merke Phasenwinkel – Ein Mundstück verhält sich wie ein Filter und ändert so den Phasengang:

Sin (0 Grad)=0. Wenn etwas vom Sinus am Anfang „fehlt“, ist der Winkel positiv, ist etwas überschüssiges vor dem Sinusstart, dann ist es negativ, Cos (0Grad) = +1 ist max +90 Grad vor Sinuswert, 91Grad werden von arctan als -89 Grad interpretiert = Sprung. Es müssten 2Pi hinzugezählt werden um auf 91 Grad zu gelangen, d.h. Sprünge sind einfach nur Seiten- bzw. Richtungsänderungen. Durch Tan und arctan sehen sie so marzialisch aus! Der Cosinus springt ja nicht, er wird bei Wert 1 wieder kleiner =Richtungswechsel.

Bei Z=Peak Max. ist cos (+90° Grad)=1, es wird der Winkel vom darunterliegenden Minima gerechnet, darüber liegen Frequenzen bereits näher am nächst höheren Minima und sind so schlagartig Minus. Das bedeutet wird die Peak Maxima überschritten, dann fällt der Winkel von max positiv auf max negativ.

Bei Minima wird der Sinus aufsteigend von negativ zu positiv durchlaufen, es gibt keinen Sprung. Betrachten wir diesen Punkt als cosinus = sin+90Grad, dann kommt es zum Sprung
 $-1^\circ = 90^\circ = +89^\circ$ $0^\circ + 90^\circ = +90^\circ$, $1^\circ + 90^\circ = -89^\circ$

Das bedeutet: aufsteigende Flanken können maximal +90 Grad erreichen, max. -90° sind nun abfallende Flanken und müssten 0 beim Minima erreichen. Wie man entdeckt ist das allerdings oberhalb der MPC Popping Frequenz immer weniger der Fall, hier liegen die Phasenwinkel im negativen Bereich, Fluss eilt permanent dem Druck vor und nähert sich -90 Grad, dem Wert den normalerweise abfallende Flanken haben.

Es gibt einen Winkel, welchen die Steigung der Druckkurve bei x=0 geschlossenes Ende einnimmt:

$\arctan(\tan(k \cdot L))$

k ist die Kreiswellenzahl = Wellenzahl * 2 pi,

die Wellenzahl ist der Kehrwert der Wellenlänge = 1/Wellenlänge.

tan=Tangens oder Tangente ist die Steigung von k* L bei x=0. $\tan = dy/dx = \sin/\cos = \text{im/re}$

arctan ist der Winkel dieser Steigung im Bogenmass. Dieser ist

bei allen ungeraden Resonanzfrequenzen und Phase T=0,0 $+ \pi/2 = +1,57.. \text{Rad} (+90 \text{ Grad}) = +\cos=0$

bei allen geraden Resonanzfrequenzen und Phase T=0,0 $- \pi/2 = -1,57.. \text{Rad} (-90 \text{ Grad}) = -\cos=0$

bei allen Antiresonanzen=Vielfachen 1/2WL, Phase T=0,0 $0^\circ = \sin=0$